Е. В. Хорошилова

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ: НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ СПО

2-е издание, переработанное и дополненное

Рекомендовано Учебно-методическим отделом среднего профессионального образования в качестве учебного пособия для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования

Книга доступна в электронной библиотечной системе
biblio-online.ru

Москва ▪ Юрайт ▪ 2019

УДК 517(075.32)
ББК 22.161я723
Х79

***Автор*:**

Хорошилова Елена Владимировна — доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

***Рецензенты*:**

Фомичев В. В. — профессор, доктор физико-математических наук, заместитель заведующего кафедрой нелинейных динамических систем и процессов управления факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова;

Мухин С. И. — доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительных методов факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного униврстситета имени М. В. Ломоносова.

Хорошилова, Е. В.

Х79 Математический анализ: неопределенный интеграл : учеб. пособие для СПО / Е. В. Хорошилова. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 187 с. — (Серия : Профессиональное образование).

ISBN 978-5-534-06949-5

В книге приводятся основные теоретические сведения о неопределенных интегралах, рассмотрено большинство известных приемов и методов интегрирования и различные классы интегрируемых функций (с указанием способов интегрирования). Изложение материала подкреплено большим количеством разобранных примеров вычисления интегралов (более 200 интегралов), в конце каждой главы приводятся задачи для самостоятельного решения (более 200 задач с ответами).

Книга предназначена для освоения на практике теории неопределенного интеграла, выработки навыков практического интегрирования, закрепления курса лекций, использования на семинарах и во время подготовки домашних заданий. Цель пособия — помочь студенту в освоении различных приемов и методов интегрирования.

Соответствует актуальным требованиям Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования и профессиональным требованиям.

Для студентов среднего профессионального образования, в том числе математических специальностей, изучающих интегральное исчисление в рамках курса математического анализа.

УДК 517(075.32)
ББК 22.161я723

ISBN 978-5-534-06949-5

Оглавление

Предисловие ко второму изданию

Данное издание является учебно-справочным пособием по неопределенным интегралам, разработанным автором на основе длительного опыта проведения семинаров по математическому анализу на младших курсах факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова.

За время, прошедшее с момента выхода 1-го издания (2007 г.), старшеклассники и студенты СПО в большинстве своем стали испытывать нехватку общематематических знаний. Недостаток разнообразия решаемых в средней школе задач немедленно сказывается на общей подготовке школьников по математике (это не касается сильных физико-математических школ). В результате старшеклассники испытывают все бомльшие трудности в изучении основ математических дисциплин, и в частности начал математического анализа, что сказывается в целом на уровне подготовки приходящих на первый курс абитуриентов. Обращение к учебным пособиям, как классическим, так и созданным преподавателями колледжа или вуза, где учится студент, дает возможность восполнить пробелы школьного образования, наверстать своих ушедших вперед сокурсников, которым посчастливилось учиться в хорошей математической школе, и глубже разобраться в данном предмете уже на новом уровне. Безусловно, студент должен для этого обладать навыком самостоятельной работы с учебной (специальной) литературой.

Данная книга успешно прошла апробацию временем и практикой на факультете ВМК МГУ, и хочется надеяться, что новое переиздание пособия расширит круг читателей и поможет студентам вузов повысить уровень своих знаний при изучении неопределенных интегралов.

Если кратко сформулировать цели данного издания, то в результате работы с данной книгой студент должен освоить:

трудовые действия

• навыки вычисления интегралов разной сложности;

необходимые умения

• формулировать необходимые определения и свойства;

• применять необходимые свойства в решении задач;

необходимые знания

• основные понятия, связанные с неопределенным интегралом;

• свойства неопределенного интеграла;

• приемы и методы вычисления неопределенного интеграла для разных классов функций.

Предисловие к первому изданию

Книга посвящена одной их важнейших тем, традиционно изучаемых в образовательных учреждениях среднего профессионального образования, — интегральному исчислению. Не все поступившие на первый курс изучали эту тему в средней школе, а научиться хорошо интегрировать за время отведенных по учебной программе 3-4 семинарских занятий является трудно выполнимой задачей даже для способных молодых людей, получивших в средней школе начальный опыт. Дело в том, что необходимо разбираться в существующих приемах интегрирования и многочисленных подстановках, на изучение которых требуется определенное время для выработки практических навыков.

Данная брошюра написана именно для того, чтобы любой студент, начинающий изучать интегральное исчисление, мог получить в сжатом виде информацию о наиболее изученных *классах интегрируемых функций* одной вещественной переменной, а также об основных *методах вычисления неопределенных интегралов*. Это тем более важно, что полученные при этом навыки пригодятся в будущем при изучении определенных, а также кратных, поверхностных, криволинейных и прочих видов интегралов.

В начале пособия приводятся определения первообразной и неопределенного интеграла, сформулированы важнейшие свойства интегралов, дается таблица наиболее часто используемых интегралов от элементарных функций, а затем для каждого класса интегрируемых функций (рациональные дроби, иррациональные, тригонометрические и другие функции) рассматриваются соответствующие приемы интегрирования. В этом смысле данное пособие является *мини-справочником* по приемам интегрирования. Каждый из приведенных способов вычисления интегралов иллюстрируется примерами решения задач.

Конечно, разобранных в пособии примеров задач недостаточно для более *детального* изучения этого раздела интегрального исчисления. В известной мере книга является лишь путеводителем по неопределенным интегралам, с помощью которого можно начать осваивать данный раздел. Практическое интегрирование с необходимостью должно предваряться изучением теории неопределенных интегралов с подробными выводами, теоремами и обоснованиями. При этом рекомендуется обращаться к проверенным временем учебникам по курсу математического анализа (например, трудам Г. М. Фихтенгольца, Л. Б. Кудрявцева и С. М. Никольского, В. А. Ильина, Э. Г. Позняка, В. А. Садовничего, Бл. Х. Сендова и других), научным трудам известных математиков по упомянутой теме, а также лекциям, читаемым для студентов специальности. И, конечно, работу с данной брошюрой надо сочетать с решением достаточного количества задач. Только тогда будут приобретены необходимые навыки практического интегрирования.

И в заключение несколько практических советов студентам. Следует иметь в виду, что проработку материала по любой теме не стоит откладывать «на потом», т.е на время сессии. Лучше всего делать это постепенно, параллельно тому, как на практических занятиях изучается с преподавателем тот или иной раздел. Если при этом возникают вопросы, то не надо стесняться задавать их преподавателю и свом коллегам. Важно проявлять инициативу, консультироваться у людей, лучше вас разбирающихся в данной области, используя любую возможность, поскольку вы заинтересованы в том, чтобы хорошо освоить изучаемую дисциплину.

Отвечая на экзамене на вопрос билета, четко формулируйте необходимые определения и свойства. Надо приучить себя к аккуратности и строгости проведения математических доказательств, быть готовым в любой момент, если понадобится, привести все необходимые пояснения и обоснования. Поэтому при работе с учебной литературой сразу обращайте внимание на встречающиеся в тексте определения и формулировки свойств, старайтесь их запомнить. Следует помнить, что во время экзамена студенту обычно предлагается решить одну или несколько задач, продемонстрировав тем самым навыки и умения использовать свои знания на практике. Для этого, как уже отмечалось выше, необходимы соответствующий опыт и постоянная тренировка в решении задач.

Пособие написано автором, кандидатом физико-математических наук, доцентом, на основе многолетнего опыта ведения семинаров по математическому анализу на первом курсе факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М. В. Ломоносова.

Глава 1
ПОНЯТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Интегральное исчисление — раздел математики, в котором изучаются свойства интегралов и связанных с ними процессов интегрирования. Простейшими понятиями интегрального исчисления являются неопределенный интеграл и определенный интеграл. Этот раздел тесно связан с дифференциальным исчислением, вместе с которым составляет одну из основных частей математического анализа. Как дифференциальное, так и интегральное исчисление базируются на методе бесконечно малых или методе пределов.

Большой энциклопедический словарь[1]

Напрасно думают, что она (фантазия) нужна только поэту. Это глупый предрассудок! Даже в математике она нужна, даже открытие дифференциального и интегрального исчислений невозможно было бы без фантазии.

В. И. Ленин

1.1. Историческая справка

В настоящее время изучение темы «интегралы» чаще всего начинают с понятия первообразной функции, потом вводят понятие неопределенного интеграла, изучают его свойства и уже затем переходят к изучению определенного интеграла и его разновидностей (собственного и несобственного видов) и установлению тесной связи неопределенного и определенного интегралов. Однако исторически первоначально сформировалось понятие интеграла определенного.

---

[1] Математика. Большой энциклопедический словарь / под ред. Ю. В. Прохорова. 3-е изд. М. : Большая российская энциклопедия, 2000.

Известно, что вплоть до конца XVII в. математики умели вычислять некоторые виды определенных интегралов, решая с их помощью отдельные практические задачи по вычислению площадей и объемов тел, однако в то время еще не существовало четкого общего определения определенного интеграла. Не существовало тогда и понятия первообразной. Это было связано с недостаточным развитием теории пределов и основанного на ней дифференциального исчисления. Их развитие, в свою очередь, тормозилось отсутствием строгой теории вещественного числа.

В конце XVII в. в Европе образовались две крупные математические школы, которые существовали на протяжении почти всего XVIII в. Главой одной из них был крупный немецкий ученый *Готфрид Вильгельм фон Лейбниц* (1646—1716). Как он сам, так и его ученики и сотрудники — *Гильом Франсуа Лопиталь* (1661—1704), братья *Якоб* (1654—1705) и *Иоганн* (1667—1748) *Бернулли*, а также его непосредственные последователи, в том числе *Леонард Эйлер* (1707—1783), жили и творили в основном на континенте. Вторая школа, предшественниками которой были *Джон Валлис* (1616—1703) и *Исаак Барроу* (1630—1677), возглавляемая *Исааком Ньютоном* (1643—1727), состояла из английских и шотландских ученых. В их числе был и *Колин Маклорен* (1698—1746). Работа обеих школ привела к большому прогрессу в области математического анализа, к созданию в достаточно законченном виде дифференциального и интегрального исчислений.

Так, Г. Лейбниц, исходя из понятия определенного интеграла, пришел к понятию функции $F(x)$, являющейся перво́бразной[1] для данной функции $f(x)$, так что $F'(x) = f(x)$. Отсюда следовало заключение о том, что дифференцирование и интегрирование являются двумя взаимно обратными операциями, вроде сложения и вычитания, умножения и деления, возведения в степень и извлечения корня. Вычисление интегралов Лейбниц и его ученики (первыми из которых являлись братья Я. и И. Бернулли) стали сводить к отысканию первобразных. При вычислении интегралов с определенными пределами с помощью неопределенных интегралов как Ньютон, так и Лейбниц пользовались носящей их имя формулой.

Среди используемых Лейбницем специальных способов интегрирования были замена переменной, интегрирование по ча-

[1] От слова «о́браз». Иногда встречается ударение на четвертом слоге.

стям, а также дифференцирование по параметру под знаком интеграла. Лейбницу принадлежит также идея интегрирования рациональных дробей при помощи разложения их на простейшие дроби, впоследствии усовершенствованная другими учеными. Именно Лейбниц предложил использовать для обозначения интеграла знак $\int y dx$ (1686), где символ $\int$ есть стилизованное удлиненное S (первая буква слова «Summa»).

Термин «первообразная» (или примитивная) функция ввел в начале XVIII в. *Джозеф Луи Лагранж* (1736—1813). Термин «интеграл» впервые употребил в печати Я. Бернулли в 1690 г., после чего вошло в обиход и выражение «интегральное исчисление».

Независимо от Г. Лейбница и еще до него эти результаты были получены И. Ньютоном. Многие задачи из механики и физики ведут, как известно теперь, к понятию первообразной функции и неопределенного интеграла, однако исторически, в частности у Ньютона, это понятие возникло из геометрии как задача квадратуры кривой. Ньютону удалось доказать, что площадь $S(x)$ криволинейной трапеции, ограниченной снизу осью абсцисс, сверху — графиком кривой $y = f(x)$, определенной и непрерывной на отрезке $[a; b]$, если ее рассматривать на отрезке $[a; x]$, где x — произвольно взятое на $[a; b]$ значение, есть первообразная функция для функции $y = f(x)$: $S(x) = F(x) - F(a)$. Это равенство, пользуясь современными символами, можно записать в виде

$$S = \int_a^x f(x)dx = F(x) - F(a).$$

Для определения площади всей криволинейной трапеции следует положить $x = b$:

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Это и есть так называемая *формула Ньютона — Лейбница*, содержание которой по существу восходит к И. Барроу. В ней определенный интеграл, рассматриваемый как функция верхнего переменного предела интегрирования x, представлен в виде одной из первообразных $F(x) + C$ ($C = -F(a)$) подынтегральной функции f. Эта формула носит также название *основной формулы интегрального исчисления*. Она позволяет сводить довольно сложное вычисление определенных интегралов, т. е. нахождение пределов интегральных сумм, к сравнительно более простой операции отыскания первообразных.

Правая часть в этой формуле называется *двойной подстановкой* и записывается в виде $F(x)\big|_a^b$. Итак, задача вычисления площади фигур, т. е. квадратура, ведет к понятиям как определенного, так и неопределенного интегралов. Вот почему вычисление интегралов стали иногда называть *квадратурой*. Важнейшую роль в интегрировании Ньютон уделял разложению интегрируемой функции в степенной ряд и затем почленному его интегрированию. Интегрирование в конечном виде также не было оставлено Ньютоном без внимания, хотя играло в его исследованиях второстепенную роль.

В XVIII в. наибольший вклад в развитие и популяризацию дифференциального и интегрального исчислений внес Л. Эйлер. До него кроме «Анализа бесконечно малых» Лопиталя (1696), содержащего лишь начальные сведения по дифференциальному исчислению, и курса лекций по интегральному исчислению И. Бернулли (1742), составленных, как и книга Лопиталя, в 1690-х гг., по сути, не было никаких учебников или общих руководств по этой новой отрасли науки. Указанные две книги значительно устарели и в первой половине XVIII в. отстали от развития анализа. Остро чувствовалась потребность в новом систематическом курсе. Это обстоятельство и побудило Эйлера составить полный курс математического анализа. Этот курс состоит из следующих книг:

1) «Введение в анализ бесконечных», 2 тома (1748);
2) «Дифференциальное исчисление», 1 том (1755);
3) «Интегральное исчисление», 3 тома (1768—1769).

Эти книги содержат как результаты работ предшественников и современников Эйлера, так и многие его собственные исследования в области анализа. В своих трудах Эйлер излагает многочисленные приемы вычисления неопределенных интегралов, применяя и развивая новые методы, такие как, например, интегрирование по параметру, использование разных подстановок (подстановки Эйлера) и др. В отличие от Лейбница, у Эйлера, как и у Ньютона, исходным является понятие первообразной, т. е. неопределенного интеграла. «Неопределенным» интеграл называется потому, что определяется с точностью до произвольной постоянной C. Определенный интеграл был для Эйлера лишь частным случаем неопределенного, одной из первообразных. Именно Эйлер предложил использовать знак $\sum$ (греческая буква «сигма») для обозначения интегральных сумм.

Существенный вклад в развитие интегрального и дифференциального исчислений внесли также французский ученый и просветитель *Жан Даламбер* (1717—1783) и, особенно, крупный французский математик *Огюстен Луи Коши* (1789—1857).

Развитием математического анализа в XIX в. занимались и русские ученые, например *М. В. Остроградский* (1801—1862) и *П. Л. Чебышёв* (1821—1894). Академику Михаилу Васильевичу Остроградскому принадлежат такие важнейшие результаты в области интегрального исчисления, как формула, сводящая вычисление тройного (и, вообще, n-кратного) интеграла к вычислению двойного ($(n-1)$-кратного) интеграла, общий прием интеграции рациональных функций, формула преобразования переменных в многомерных интегралах и др. Пафнутий Львович Чебышёв посвятил шесть больших мемуаров интегрированию алгебраических функций. Среди его классических результатов имеется знаменитая теорема об интегрировании биномиальных дифференциалов.

Итак, рассмотрим задачу восстановления функции по ее известной производной. Это важнейшая задача интегрального исчисления. Процедура нахождения функции по ее производной называется *интегрированием*. Интегрирование является процедурой, обратной дифференцированию (нахождению производной от заданной функции).

1.2. Понятие первообразной функции и неопределенного интеграла

Пусть на интервале $(a; b)$, возможно бесконечном, определена функция одной действительной переменной f.

Определение 1.1 (*точной первообразной*). Функция F называется *точной первообразной* по отношению к функции f на интервале $(a; b)$, если в любой точке x этого интервала функция F дифференцируема и имеет производную $F'(x)$, равную $f(x)$ (или, что то же самое, $f(x)dx$ служит дифференциалом для $F(x)$: $dF(x) = f(x)dx$).

Например, функция $\sin x$ является точной первообразной для функции $\cos x$ на множестве всех действительных чисел $\mathbb{R}$, поскольку $(\sin x)' = \cos x$.

Замечание. Под точной первообразной для функции f *на сегменте* $[a; b]$ будем понимать функцию F, имеющую производную $F'(x)$ в любой внутренней точке x сегмента, равную $f(x)$, и, кроме того, имеющую правую производную $F'(a + 0)$, равную $f(a + 0)$, и левую производную $F'(b - 0)$, равную $f(b - 0)$.

Заметим, что если функция f имеет на $(a; b)$ хотя бы одну первообразную функцию F, то она имеет на этом интервале сразу бесконечное множество первообразных, поскольку любая функция вида $F + C$, где C — произвольное действительное число, также будет удовлетворять определению первообразной. Более того, если F — одна из первообразных для функции f на $(a; b)$, то любая другая первообразная $\overline{F}$ для этой функции на данном интервале имеет вид $\overline{F} = F + C$, где C — некоторое действительное число. Таким образом, любые две первообразные одной функции могут отличаться только на константу. Подчеркнем, что в силу дифференцируемости первообразная всегда является непрерывной функцией.

Не всякая функция имеет первообразную в приведенном выше строгом смысле слова, потому что не всякая функция является производной от другой функции. Но если функция f, определенная на $(a; b)$, имеет на этом множестве первообразную, то она называется *интегрируемой* на нем. Расширить класс интегрируемых функций позволило введение понятия обобщенной первообразной.

Определение 1.2 (*обобщенной первообразной*). Функция F называется *обобщенной первообразной* для функции f на интервале $(a; b)$, если:

1) F непрерывна на $(a; b)$;

2) в любой точке $x \in (a; b)$, за исключением, быть может, множества точек K, функция F дифференцируема и имеет производную $F'(x)$, равную $f(x)$. При этом в случае конечного интервала $(a; b)$ множество K состоит не более чем из конечного числа точек. Если же интервал $(a; b)$ бесконечен, т. е. имеет вид $(-\infty; b)$, $(a; +\infty)$ или $(-\infty; +\infty)$, то множество K может быть счетным, но при этом каждый конечный подынтервал из $(a; b)$ не должен содержать более конечного числа точек K.

Таким образом, в отличие от определения точной первообразной, в понятии обобщенной первообразной допускается, что производная может не существовать в отдельных точках интервала интегрирования. Если нет необходимости подчеркивать, что мы имеем дело именно с точной или обобщенной первообразной, то будем называть функцию F просто *первообразной*.

Пример 1.1. Найти все первообразные для функции $f(x) = \operatorname{sgn} x$ на интервале $(-1; 1)$.

Решение. Покажем, что точная первообразная для данной функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in (0; 1), \\ 0, \text{ если } x = 0, \\ -1, \text{ если } x \in (-1; 0) \end{cases}$$

на указанном интервале не существует и можно найти лишь обобщенную первообразную. Действительно, при $x \in (0; 1)$ первообразная F имеет общий вид $x + C_1$, а при $x \in (-1; 0)$, соответственно, вид $-x + C_2$, где C_1, C_2 — произвольные действительные константы. Учтем, что в точке $x = 0$ первообразная должна быть непрерывной. Записав условие непрерывности

$$\lim_{x \to 0-0} (-x + C_2) = \lim_{x \to 0+0} (x + C_1) = F(0),$$

определяем искомое соотношение между константами: $C_2 = C_1$. Таким образом, общий вид любой из первообразных: $F(x) = |x| + C_1$, где $C_1 \in \mathbb{R}$. Любая из этих функций непрерывна на $(-1; 1)$ и $\forall x \in (-1; 0) \cup (0; 1)$ ее производная совпадает с $\operatorname{sgn} x$. При этом в точке $x = 0$ первообразная не имеет производной.

Пример 1.2. Найти общий вид первообразной для функции $f(x) = e^{|x|}$ на всей числовой прямой.

Решение. При $x > 0$ $f(x) = e^x$ и первообразная имеет вид $F(x) = e^x + C_1$, где $C_1 \in \mathbb{R}$. При $x < 0$ $f(x) = e^{-x}$ и, соответственно, ее первообразная имеет вид $F(x) = -e^{-x} + C_2$, $C_2 \in \mathbb{R}$. Учтем теперь непрерывность первообразной в точке $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0-0} (-e^{-x} + C_2) = \lim_{x \to 0+0} (e^x + C_1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -1 + C_2 = 1 + C_1 \Leftrightarrow C_2 = C_1 + 2.$$

Таким образом, общий вид любой из первообразных следующий:

$$F(x) = \begin{cases} e^x + C_1, \text{ если } x \geqslant 0, \\ -e^{-x} + C_1 + 2, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

Отметим, что, так как

$$F'_+(0) = \lim_{x\to 0+0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x\to 0+0} \frac{(e^x + C_1) - (1 + C_1)}{x} = 1$$

и

$$F'_-(0) = \lim_{x\to 0-0} \frac{(-e^{-x} + C_1 + 2) - (1 + C_1)}{x} = \lim_{(-x)\to 0+0} \frac{-e^{-x} - 1}{-x} = 1,$$

то функция F дифференцируема всюду, включая точку $x = 0$, т. е. мы нашли точную первообразную.

Определение 1.3 (*неопределенного интеграла*). Совокупность всех первообразных функций для данной функции f на промежутке $(a; b)$ называется *неопределенным интегралом* от функции f на этом множестве и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где F — любая первообразная для f на $(a; b)$; C — произвольная действительная константа. При этом символ $\int$ называется знаком интеграла, $f(x)$ — подынтегральной функцией (если интеграл существует, то функция называется интегрируемой), $f(x)dx$ — подынтегральным выражением, x — переменной интегрирования, а dx — ее дифференциалом.

Область интегрирования $(a; b)$ обычно можно определить из контекста задачи (чаще всего это промежутки непрерывности функции f). Например,

$$\int 0dx = C; \ \int dx = x + C.$$

Пример 1.3. Найти неопределенный интеграл $\int \max(1; x^2)dx$.

Решение. Рассмотрим случаи: $|x| \leqslant 1$ и $|x| > 1$.

1. Если $-1 \leqslant x \leqslant 1$, то имеем

$$\int \max(1; x^2)dx = \int dx = x + C.$$

2. Если $x > 1$, то имеем

$$\int \max(1; x^2)dx = \int x^2dx = \frac{x^3}{3} + C_1.$$

В силу непрерывности первообразной в точке $x = 1$ должно выполняться условие $1 + C = \frac{1}{3} + C_1$, откуда $C_1 = C + \frac{2}{3}$.

3. Если $x < -1$, то имеем

$$\int \max(1; x^2)dx = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C_2;$$

соответственно, для непрерывности первообразной в точке $x = -1$ должно выполняться равенство $-1 + C = -\frac{1}{3} + C_2$, откуда $C_2 = C - \frac{2}{3}$.

Итак, окончательно

$$\int \max(1; x^2)dx = \begin{cases} \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3} + C, \text{где } x < -1, \\ x + C, \text{где } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} + C, \text{где } x > 1, \end{cases}$$

где C — произвольная постоянная.

Пример 1.4. Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt{1 - \sin 2x}\,dx$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$.

Решение. Имеем

$$\int \sqrt{1 - \sin 2x}\,dx = \int \sqrt{(\cos x - \sin x)^2}\,dx = \int |\cos x - \sin x|\,dx =$$

$$= \begin{cases} \int (\cos x - \sin x)dx, \text{если } 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}, \\ \int (\sin x - \cos x)dx, \text{если } \frac{\pi}{4} < x \leqslant \pi \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \sin x + \cos x + C, \text{если } 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}, \\ -\sin x - \cos x + C_1, \text{если } \frac{\pi}{4} < x \leqslant \pi. \end{cases}$$

В точке $x = \frac{\pi}{4}$ запишем условие непрерывности первообразных:

$\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} + C = -\sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4} + C_1$, или $\sqrt{2} + C = -\sqrt{2} + C_1$, откуда $C_1 = C + 2\sqrt{2}$.

Таким образом, имеем

$$\int \sqrt{1-\sin 2x}\,dx = \begin{cases} \sin x + \cos x + C, \text{если } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4}, \\ -\sin x - \cos x + C + 2\sqrt{2}, \text{если } \dfrac{\pi}{4} < x \leqslant \pi. \end{cases} \qquad (1)$$

Замечание. Иногда в данной задаче приводят ответ в виде

$$\int \sqrt{1-\sin 2x}\,dx = (\sin x + \cos x)\cdot \operatorname{sgn}(\cos x - \sin x) + C.$$

Надо понимать, что это не вполне корректно. Действительно, так выглядит неопределенный интеграл *на каждом* из промежутков $\left[0;\ \dfrac{\pi}{4}\right)$ и $\left(\dfrac{\pi}{4};\ \pi\right]$. Однако *на всем отрезке* $[0;\ \pi]$ интеграл равен именно выражению (1).

Вообще, если в условии задачи сказано, что надо вычислить неопределенный интеграл, но не указано, на каком именно промежутке, то это подразумевает, что его требуется вычислить на области интегрируемости подынтегральной функции. И, строго говоря, в ответе следует указывать эту область интегрируемости, например: $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$ $(x \neq 0)$. Такая запись означает, что данная формула справедлива для любого интервала, не содержащего внутри себя значение $x = 0$ (в том числе для каждого из бесконечных интервалов $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$). Эта форма ответа в данном случае единственно возможная, так как найти интеграл на объединении этих промежутков нельзя (первообразные терпят разрыв 2-го рода в точке $x = 0$).

Иногда при вычислении интеграла применяется искусственный прием деления на некоторое выражение, которое, естественно, тогда не должно обращаться в нуль. Допустим, это выражение равно нулю при $x = x_0$. Тогда вычисляют интеграл при $x \neq x_0$, а в конце, если при этом значении x_0 ни подынтегральная функция, ни первообразные не имеют особенностей (определены и непрерывны), доопределяют полученное выражение для первообразных в точке x_0 их предельными значениями.

Пример 1.5. Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{x^2 - 1}{(x^2 + x + 1)^2}\,dx.$$

Решение. Подынтегральная функция определена, непрерывна и, следовательно, интегрируема при всех действительных x. При $x \neq 0$ имеем

$$\int \frac{x^2-1}{(x^2+x+1)^2}dx = \int \frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(x+\frac{1}{x}+1\right)^2}dx = \int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}+1\right)^2} =$$

$$= \int \frac{du}{(u+1)^2} = -\frac{1}{u+1} + C = -\frac{x}{x^2+x+1} + C.$$

В точке $x = 0$ подынтегральная функция и ее первообразные $-\frac{x}{x^2+x+1} + C$ непрерывны, поэтому полученный для интеграла результат можно считать верным и при $x = 0$, если доопределить каждую из первообразных ее значением в нуле.

Ответ: $-\frac{x}{x^2+x+1} + C, x \in \mathbb{R}$.

Пример 1.6. Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+3x^2+1}dx.$$

Решение. При $x \neq 0$ имеем

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+3x^2+1}dx = \int \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(x^2+3+\frac{1}{x^2}\right)}dx = \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+5}dx =$$

$$= \int \frac{du}{u^2+5} = \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{5}} + C = \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{5}} + C.$$

Подынтегральная функция определена, непрерывна, а следовательно, и интегрируема при всех действительных значениях x. Интеграл вычислен сейчас отдельно на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$. Заметим, что в данном случае можно найти интеграл на всем множестве действительных чисел. Для этого надо дополнительно учесть условие непрерывности первообразных в нуле. Найдем пределы:

$$\lim_{x\to\pm 0}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{5}}\right) = \mp\frac{\pi}{2\sqrt{5}}.$$

Поскольку оба односторонних предела в нуле существуют и конечны, то результат интегрирования можно представить в виде

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+3x^2+1}dx = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{5}}+C+\frac{\pi}{\sqrt{5}}, x>0, \\ \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{5}}+C, x<0, \\ \frac{\pi}{2\sqrt{5}}+C, \ x=0. \end{cases}$$

Обратим внимание читателя еще на одно обстоятельство. Если подынтегральная функция содержит радикалы вида $\sqrt{x^2-a^2}$ (или $\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$), то в этом случае первообразная ищется на луче $x > a$ или на луче $x < -a$. Так как обычно нет никаких оснований предпочесть один луч другому, то часто выбирают тот луч, на котором будет более простая запись преобразованного подынтегрального выражения, т. е. луч $x > a$ (на другом луче $x < -a$ первообразная находится совершенно аналогичными рассуждениями). Это позволяет при упрощении радикалов однозначно раскрывать модули. В этой же ситуации при записи ответа (и непосредственно интегрировании) можно также использовать функцию сигнум.

Пример 1.7. Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Решение. Воспользуемся подстановкой $t = \frac{1}{x}$, тогда

$$dx = -\frac{dt}{t^2}, \ \sqrt{x^2-1} = \sqrt{\frac{1}{t^2}-1} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{|t|}$$

и, учитывая тождество $|t| = t\cdot\operatorname{sgn} t$, получаем

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\cdot\frac{\sqrt{1-t^2}}{|t|}} = -\operatorname{sgn} t\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\int \frac{d|t|}{\sqrt{1-|t|^2}} =$$

$$= -\arcsin|t| + C = -\arcsin\frac{1}{|x|}+C.$$

1.3. Интегралы, выражаемые и невыражаемые в элементарных функциях

Трудность интегрального исчисления сравнительно с дифференциальным исчислением состоит в том, что неопределенный интеграл от элементарной функции может не быть элементарной функцией. Даже в тех случаях, когда интеграл выражается через элементарные функции (т. е., как говорят, берется в конечном виде), нет единых рецептов, которые позволяли бы найти такое выражение. В то же время различные способы интегрирования рассматриваются в курсе математического анализа, существуют обширные таблицы интегралов.

Известны сравнительно немногие общие классы функций, для которых интегрирование может быть выполнено в конечном виде. Обычно их и изучают в курсе высшей школы. В частности, важный класс функций, интегралы от которых берутся в конечном виде, представляют собой рациональные алгебраические функции в виде отношения двух многочленов $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Многие иррациональные алгебраические функции, например рационально зависящие от $\sqrt{ax^2+bx+c}$ и x или же от x и рациональных степеней дроби $\frac{ax+b}{cx+d}$, также интегрируются в конечном виде. В конечном виде интегрируются и некоторые трансцендентные функции, например рациональные функции синуса и косинуса.

Доказано, что любая непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция f всегда имеет на интервале $(a; b)$ первообразную, в качестве которой можно взять определенный интеграл с переменным верхним пределом: $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ $(a < x < b)$. Поэтому все элементарные функции интегрируемы на всех интервалах, входящих в их области определения. Однако в результате интегрирования далеко не всегда получаются снова элементарные функции, как это имеет место при дифференцировании.

Функции, которые изображаются неопределенными интегралами, не берущимися в конечном виде, образуют собой новые трансцендентные функции. Многие из них также хорошо изучены. К ним относятся, например:

- интеграл Пуассона $\int e^{-x^2}dx$;
- интегралы Френеля $\int \sin(x^2)dx$; $\int \cos(x^2)dx$;
- интегральный логарифм $\mathrm{li}(x) = \int \frac{dx}{\ln x}$;
- интегральные синус $\mathrm{si}(x) = \int \frac{\sin x}{x}dx$ и косинус $\mathrm{ci}(x) = \int \frac{\cos x}{x}dx$;
- интегральная показательная функция $\mathrm{Ei}(x) = \int \frac{e^x}{x}dx$.

Не вычисляются в элементарных функциях интегралы $\int \frac{e^x}{x^n}dx$, $\int \frac{\sin x}{x^n}dx$, $\int \frac{\cos x}{x^n}dx$ $(n \in \mathbb{N})$ и многие другие. Так, интегралы вида $\int R(x, \sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + \delta})dx$, как правило, уже не выражаются в конечном виде через элементарные функции. Функции, сами не являющиеся элементарными, но определяемые через них с помощью аналитических соотношений типа интегрирования и дифференцирования, обычно называют *специальными функциями*.

Даже если интеграл не поддается аналитическому вычислению, его можно рассчитать приближенно с некоторой степенью точности. Так, в курсе вычислительных методов изучаются специальные способы приближенного вычисления интегралов с помощью различных разностных схем (методы прямоугольников, трапеций, парабол, сплайн-аппроксимация и прочие подходы).

1.4. Основные свойства неопределенного интеграла

Основные свойства неопределенного интеграла следуют из его определения (см. доказательство в работе [13]).

1. $(\int f(x)dx)' = f(x)$; $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$.
2. $\int dF(x) = F(x) + C$ $(C \in \mathbb{R})$.
3. $\int C \cdot f(x)dx = C \cdot \int f(x)dx$, где $C \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ (постоянный множитель можно выносить из-под знака интеграла).
4. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ (свойство аддитивности; подразумевается, что обе функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на одном и том же множестве).

Свойства 1 и 2 отражают взаимно обратный характер операций интегрирования и дифференцирования. Свойства 3 и 4 отражают свойство линейности неопределенного интеграла, причем эти равенства носят условный характер: они выполняются лишь с точностью до произвольной константы. Следующее свойство 5 показывает, что приведенная ниже таблица интегралов справедлива независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или функцией.

5. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$ — непрерывно дифференцируема, то $\int f(u)du = F(u) + C$.

6. Одна из первообразных четной функции есть функция нечетная, а всякая первообразная нечетной функции есть функция четная.

Рассмотрим далее *табличные* интегралы и наиболее *общие методы* вычисления неопределенных интегралов. К ним традиционно относят следующие: сведение интеграла к простейшим интегралам при помощи тождественных преобразований и использования свойств интегралов, метод замены переменной и интегрирование по частям. Обратим внимание на то, что приписывать константу C в неопределенном интеграле нужно обязательно, в противном случае вы находите лишь одну из первообразных, и это считается весьма грубой ошибкой. Кроме того, надо приучить себя при вычислении неопределенных интегралов всегда указывать область интегрирования (аналог области допустимых значений (ОДЗ) в уравнениях и неравенствах, области определения функций). Заметим также, что ниже мы будем говорить об интегралах только для непрерывных функций. Если же функция имеет точки разрыва, то рассматривать ее будем лишь в промежутках ее непрерывности, где интеграл от нее существует.

1.5. Таблица простейших интегралов

Отметим, что название «табличный интеграл» является довольно условным. Существует некоторый минимальный набор неопределенных интегралов, к которым наиболее часто сводится вычисление интегралов. В частности, к ним относят интегралы от некоторых известных элементарных функций. По мере того как вы приобретаете все больше навыков в вычислении неопределенных интегралов, понятие «табличного интеграла» расширяется и в условную таблицу попадают многие из вычисленных прежде интегралов. Правильность выполненного интегрирования в случае сомнений всегда можно проверить, продифференцировав полученный результат. Приведем лишь некоторые, наиболее часто употребляемые виды интегралов.

Интегралы от *степенны́х* функций.

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ $(n \in \mathbb{R}, n \neq -1; x \in \mathbb{R})$.

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$ $(n = -1, x \neq 0)$.

Интегралы от *показательных,* и в частности *экспоненциальной* $(a = e)$, функций.

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $(a > 0, a \neq 1; x \in \mathbb{R})$; $\int e^x dx = e^x + C$.

Интегралы от *тригонометрических* функций.

4. $\int \cos x dx = \sin x + C$ $(x \in \mathbb{R})$.

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$ $(x \in \mathbb{R})$

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$ $(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z})$.

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$ $(x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z})$.

Интегралы от *рациональных* функций.

8. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arcctg} x + C \end{cases}$ $(x \in \mathbb{R})$; этот интеграл подразумевает двоякую форму записи; в зависимости от ситуации можно использовать как первое, так и второе его представление.

9. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \\ -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C \end{cases}$ $(x \in \mathbb{R})$; здесь и ниже параметр a считаем положительным.

10. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$ $(x \neq \pm a)$.

Интегралы от *иррациональных* функций.

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C \end{cases}$ $(|x| < 1)$.

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \begin{cases} \arcsin\frac{x}{a}+C, \\ -\arccos\frac{x}{a}+C \end{cases} \quad (|x| < a).$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C \ (x^2 \pm a^2 > 0).$

14. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C \ \ (|x| \leqslant a).$

15. $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right| + C.$

Интегралы от *гиперболических* функций.

16. $\int \mathrm{ch}\,x\,dx = \mathrm{sh}\,x + C \ (x \in \mathbb{R}).$

17. $\int \mathrm{sh}\,x\,dx = \mathrm{ch}\,x + C \ (x \in \mathbb{R}).$

18. $\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}\,x + C \ (x \in \mathbb{R}).$

19. $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth}\,x + C \ (x \neq 0).$

Существуют специальные (пополняемые) таблицы неопределенных интегралов, содержащие большое количество ныне известных интегралов, к которым можно обращаться в случае необходимости (например, см. работу [1]).

Задачи для самостоятельного решения

Найти неопределенные интегралы:

1.1. $\int |x|\,dx.$

1.2. $\int (|1+x|) - |1-x|)\,dx.$

1.3. $\int f(x)dx$, где $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } -\infty < x < 0, \\ x+1, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2x, \text{ если } 1 < x < +\infty. \end{cases}$

1.4. $\int f(x)dx$, где $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, \text{ если } |x| \leqslant 1, \\ 1-|x|, \text{ если } |x| > 1. \end{cases}$

1.5. $\int \sqrt{1-2x^2+x^4}\,dx.$

1.6. $\int (-1)^{[x]}dx$, где $[x]$ — целая часть действительного числа x.

1.7. $\int \min(5-x^2, 1, x^2)dx.$

Глава 2
ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Практически любой неопределенный интеграл вычисляется путем его упрощения и сведения в конечном итоге к табличному (табличным) интегралу. Специфика используемых при этом математических средств позволяет отнести к *основным методам интегрирования* следующие три способа интеграции:

1) использование алгебраических, тригонометрических и прочих преобразований, а также свойств интегралов;

2) замена переменной интегрирования;

3) интегрирование по частям.

Заметим, что в любой более-менее сложной задаче обычно в различных комбинациях используются сразу несколько приемов. В частности, при вычислении интеграла замена переменных (или интегрирование по частям) могут использоваться неоднократно, сопровождаясь упрощающими решение преобразованиями подынтегрального выражения. Остановимся на каждом из перечисленных методов подробнее.

2.1. Интегрирование путем сведения к табличным интегралам с помощью различных преобразований

Иногда интеграл удается вычислить, не прибегая к замене переменной или интегрированию по частям, а просто с помощью различных алгебраических, тригонометрических и других преобразований подынтегрального выражения и используя свойство линейности интегралов. К преобразованиям такого рода относят обычно следующие:

• добавление (с одновременным вычитанием) к подынтегральной функции константы или некоторого выражения; обычно за этим следует разбиение интеграла на сумму более простых интегралов;

• одновременное умножение или деление числителя и знаменателя дроби под знаком интеграла на некоторое выражение; например, при интегрировании функций с радикалами часто применяют домножение на сопряженное выражение;

• выделение полных квадратов (кубов);

• использование формул сокращенного умножения;

• выделение у дроби целой части (часто используется при интегрировании рациональных дробей);

• выделение в числителе дроби производной от знаменателя;

• использование алгебраических тождеств, тригонометрических и гиперболических формул и т. п.

Разнообразные примеры использования перечисленных и некоторых других приемов рассматриваются ниже в тексте пособия. Обращайте на них внимание и старайтесь запоминать, в каких случаях какие приемы удобно использовать.

Вообще, умение найти для вычисляемого интеграла наиболее краткий и «красивый» способ интегрирования является часто непростой задачей. Это умение вырабатывается постепенно и приходит с опытом.

2.2. Интегрирование путем замены переменной

Изложим один из сильнейших приемов для интегрирования функций — *метод замены переменной*, или *метод подстановки*. Рассмотрим два возможных случая.

1. *Внесение функции под знак дифференциала*. Если подынтегральное выражение $f(x)dx$ представимо в виде $g(t(x))t'(x)dx$, где функция g непрерывна на множестве T, а функция $t = t(x)$ непрерывна на соответствующем множестве X вместе со своей производной $t'(x)$, то справедлива следующая формула перехода от x к новой переменной интегрирования t:

$$\int f(x)dx = \int g(t(x))t'(x)dx = \int g(t)dt. \tag{2.1}$$

При этом производная $t'(x)$ вносится под знак дифференциала согласно известному свойству дифференциала $t'(x)dx = d(t(x))$. В простейших случаях, чтобы распознать эту ситуацию, бывает достаточно знания табличных интегралов, например:

$$2xdx = d(x^2),\ \cos x dx = d(\sin x),\ \sin x dx = -d(\cos x),$$

$$\frac{dx}{x} = d(\ln x),\ \frac{dx}{x^2+1} = d(\operatorname{arctg} x),\ \frac{dx}{2\sqrt{x}} = d(\sqrt{x}),$$

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x),\ \ e^{2x}dx = d\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right).$$

В более сложных случаях могут потребоваться приобретенный ранее опыт и интуиция:

$$\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = d(\sqrt{1+x^2}),\ \left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx = d\left(x+\frac{1}{x}\right) \text{ и т. п.}$$

Замену переменной интегрирования осуществляют в тех случаях, когда получаемая в результате «новая» подынтегральная функция $g(t)$ *удобнее для интегрирования* по сравнению с исходной подынтегральной функцией $f(x)$. Основная сложность этого метода состоит в том, чтобы «увидеть» в исходном подынтегральном выражении $f(x)dx$ более простое для интегрирования выражение $g(t(x))t'(x)dx = g(t)dt$. Практически реализация метода заключается во внесении функции $t'(x)$ под знак дифференциала dx с образованием нового дифференциала dt. Вычислив интеграл $\int g(t)dt = G(t) + C$, в конце необходимо вернуться к первоначальной переменной интегрирования x путем обратной подстановки $t = t(x)$: $\int f(x)dx = G(t(x)) + C$.

Рассмотрим здесь лишь несколько примеров вычисления интегралов этим методом. Множество других примеров вы сможете найти в тексте пособия.

Пример 2.1. Найти $\int \sin^3 x \cos x dx$.

Решение. Так как $d(\sin x) = \cos x dx$, то, полагая $t = \sin x$, преобразуем подынтегральное выражение:

$$\sin^3 x \cos x dx = \sin^3 x\, d\sin x = t^3 dt.$$

Интеграл от последнего выражения вычисляется легко:

$$\int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C.$$

Осталось лишь вернуться к переменной x, подставляя $\sin x$ вместо t:

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

Отметим, что в данном примере основным назначением сделанной замены переменной было сведение интеграла от трансцендентной функции тригонометрического вида к интегралу от рациональной алгебраической функции.

Заметим также, что при определенном навыке новую переменную в простых случаях можно в явном виде и не вводить, проделав это мысленно. Скажем, в рассмотренном выше примере можно было обойтись без введения новой переменной t. Тогда решение задачи выглядело бы короче:

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \int \sin^3 x d(\sin x) = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

В следующих двух примерах при сведении интегралов к табличным также не будем вводить новые переменные, а сразу запишем результат.

Пример 2.2. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{3}{2}} x\right) + C.$$

Пример 2.3. Найти $\int e^{5x} dx$.
Решение.

$$\int e^{5x} dx = \frac{1}{5} \int e^{5x} d(5x) = \frac{1}{5} e^{5x} + C.$$

2. *Использование подстановок.* Если подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна на множестве X, то, полагая $x = x(t)$, где функция $x(t)$ непрерывна на соответствующем множестве T вместе со своей производной $x'(t)$, получим еще одну формулу перехода от x к новой переменной интегрирования t:

$$\int f(x) dx = \int f(x(t)) \cdot x'(t) dt. \qquad (2.2)$$

Нередки ситуации, когда для решения одной и той же задачи могут существовать различные подстановки. Умение подобрать наиболее эффективную в данной конкретной ситуации подстановку определяет в том числе культуру интегрирования учащегося.

Рассмотрим пример задачи, где при вычислении интеграла возможны сразу несколько различных подстановок. Следовательно, возникает проблема выбора наиболее оптимальной из них. А для того чтобы выбрать более удобную подстановку, надо знать их разновидности и области применения. Итак, сравнивайте и выбирайте.

Пример 2.4. Найти $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Решение. 1-й способ (*подстановка* $t = \frac{1}{x}$). ОДЗ: $|x| > 1$. Воспользуемся подстановкой $t = \frac{1}{x}$, тогда

$$dx = -\frac{dt}{t^2},\ \sqrt{x^2-1} = \sqrt{\frac{1}{t^2}-1} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{|t|},$$

и, учитывая тождество $|t| = t \cdot \operatorname{sgn} t$, в результате получаем

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\cdot\frac{\sqrt{1-t^2}}{|t|}} = -\operatorname{sgn} t \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\int \frac{d|t|}{\sqrt{1-|t|^2}} =$$
$$= -\arcsin|t| + C = -\arcsin\frac{1}{|x|} + C.$$

2-й способ (*подстановка* $t = \sqrt{x^2-1}$). Сделаем рационализирующую замену переменной, положив $t = \sqrt{x^2-1}$, тогда $x^2 = t^2 + 1$, $xdx = tdt$ и

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{tdt}{(t^2+1)t} = \int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + C =$$
$$= \operatorname{arctg}(\sqrt{x^2-1}) + C.$$

3-й способ (*тригонометрическая подстановка* $x = \frac{1}{\sin t}$). Выполним тригонометрическую подстановку $x = \frac{1}{\sin t}$, где $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$, тогда

$$\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}-1} = \sqrt{\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}} = \frac{\cos t}{|\sin t|} = \operatorname{sgn}(\sin t)\cdot \operatorname{ctg} t,$$
$$dx = -\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt$$

и для интеграла имеем

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{sgn}(\sin t)\int \frac{-\dfrac{\cos t}{\sin^2 t}dt}{\dfrac{1}{\sin t}\cdot \operatorname{ctg} t} = -\operatorname{sgn}(\sin t)\int dt =$$

$$= -\operatorname{sgn}(\sin t)\cdot t + C = -\operatorname{sgn} x \cdot \arcsin\frac{1}{x} + C = -\arcsin\frac{1}{|x|} + C.$$

Заметим, что можно было бы вычислить данный интеграл с помощью аналогичной подстановки через косинус: $x = \dfrac{1}{\cos t}$, где $t \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$.

4-й способ (*гиперболическая подстановка* $|x| = ch\,\text{t}$). Теперь вычислим интеграл при помощи гиперболической подстановки $|x| = ch\,\text{t}$, $t \geqslant 0$. Тогда $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1} = \sqrt{\operatorname{sh}^2 t} = |\operatorname{sh} t|$ и, следовательно,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{d|x|}{|x|\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{d(\operatorname{ch} t)}{\operatorname{ch} t\cdot|\operatorname{sh} t|} = \int \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t\cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{sh} t)\operatorname{sh} t}dt =$$

$$= \operatorname{sgn}(\operatorname{sh} t)\int \frac{dt}{\operatorname{ch} t} = \operatorname{sgn}(\operatorname{sh} t)\int \frac{\operatorname{ch} t\cdot dt}{\operatorname{ch}^2 t} = \operatorname{sgn}(\operatorname{sh} t)\int \frac{d(\operatorname{sh} t)}{1+\operatorname{sh}^2 t} =$$

$$= \operatorname{sgn}(\operatorname{sh} t)\int \frac{d(\operatorname{sh} t)}{1+\operatorname{sh}^2 t} = \operatorname{sgn}(\operatorname{sh} t)\cdot \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} t) + C = \operatorname{arctg}|\operatorname{sh} t| + C =$$

$$= \operatorname{arctg}\sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1} + C = \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1} + C.$$

5-й способ (*1-я подстановка Эйлера*). Положим $t = \sqrt{x^2-1} + x$, тогда $x^2 - 1 = (t-x)^2 \Rightarrow x = \dfrac{t^2+1}{2t} \Rightarrow dx = \dfrac{t^2-1}{2t^2}dt$ и для интеграла получаем

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\dfrac{t^2-1}{2t^2}}{\dfrac{t^2+1}{2t}\cdot\dfrac{t^2-1}{2t}}dt = 2\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= 2\operatorname{arctg} t + C = 2\operatorname{arctg}(\sqrt{x^2-1} + x) + C.$$

Подчеркнем еще раз, что замена переменной — наиболее мощный и часто используемый метод при вычислении интегралов от иррациональных и трансцендентных функций. Как правило, подобрать подходящую замену в сложных случаях — целое искусство. В некоторых случаях удается сформулировать общие рекомендации по заменам, ориентируясь на конкретный класс интегрируемых функций. Например, разработаны и проверены практикой специальные рационализирующие подстановки при интегрировании иррациональных алгебраических функций; существуют рекомендации по заменам в классе тригонометрических функций. Многие из таких подстановок будут рассмотрены ниже в соответствующих разделах.

2.3. Интегрирование по частям

Если u и v — дифференцируемые на одном и том же множестве функции и существует первообразная для функции uv', то существует и первообразная для функции vu', причем справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(t)dx,$$

или в краткой форме

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

В качестве u обычно выбирается функция, которая упрощается дифференцированием, в качестве dv — оставшаяся часть подынтегрального выражения, содержащая dx, из которой можно определить v путем интегрирования.

Данный метод используют в тех случаях, когда интеграл в правой части формулы вычисляется проще исходного интеграла (в левой части). Как правило, формула применяется в ситуациях, когда подынтегральная функция представляет собой произведение «разнородных» функций, например алгебраической и трансцендентной. В целом интегрирование по частям имеет более ограниченную область применения, чем замена переменной, но есть целые классы интегралов, например:

$$\int x^n e^a dx,\ \int x^n \sin axdx,\ \int x^n \cos axdx,$$

$$\int x^n \ln^m xdx\ (n, a \in \mathbb{R}, n \neq -1, m \in \mathbb{N}),$$

$$\int \sin(\ln x)dx,\ \int \cos(\ln x)dx,$$

а также

$$\int e^{ax}\cos bx dx,\ \int e^{ax}\sin bx dx,\ \int P(x)e^{ax}dx,\ \int P(x)\sin ax dx,$$

$$\int P(x)\cos ax dx\ (a, b \in \mathbb{R}), \int P(x)\ln x dx,\ \int P(x)\arcsin x dx,$$

$$\int P(x)\arccos x dx,\ \int P(x)\operatorname{arctg} x dx,\ \int P(x)\operatorname{arcctg} x dx,$$

где $P(x)$ — целый алгебраический многочлен относительно x:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\ (a_i \in \mathbb{R}, a_n \neq 0),$$

которые вычисляются именно с помощью интегрирования по частям.

При этом в интегралах

$$\int P(x)e^{ax}dx,\ \int P(x)\sin ax dx,\ \int P(x)\cos ax dx,$$

за u следует принять $P(x)$, а за dv — соответственно выражения $e^{ax}dx$, $\sin ax dx$, $\cos ax dx$; а в интегралах вида

$$\int P(x)\ln x dx,\ \int P(x)\arcsin x dx,\ \int P(x)\arccos x dx,$$

$$\int P(x)\operatorname{arctg} x dx,\ \int P(x)\operatorname{arcctg} x dx$$

за u принимаются соответственно функции $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$, а за dv — выражение $P(x)dx$.

В некоторых случаях для получения результата приходится несколько раз интегрировать по частям, постепенно упрощая задачу. Иногда на каком-то этапе обнаруживается, что исходный интеграл выражается через некоторые функции и себя самого, тогда его вычисляют, выражая из данного равенства (рассматривая равенство как уравнение относительно искомого интеграла).

Повторное применение правила интегрирования по частям приводит к так называемой *обобщенной формуле интегрирования по частям*. Пусть функции u и v имеют в рассматриваемом промежутке непрерывные производные всех порядков до $(n + 1)$-го включительно: $u', v', u'', v'', \ldots, u^{(n+1)}, v^{(n+1)}$.

Тогда имеет место формула

$$\int uv^{(n+1)}dx = uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} - \ldots +$$

$$+ (-1)^n u^{(n)}v + (-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}v dx.$$

Особенно выгодно пользоваться этой формулой, когда одним из сомножителей в подынтегральной функции служит алгебраический многочлен n-й степени. Тогда производная $u^{(n+1)}$ тождественно равна нулю и для интеграла в левой части получается окончательное выражение.

С помощью интегрирования по частям иногда удается вывести рекуррентную формулу понижения для отдельных типов интегралов, содержащих натуральный параметр n, позволяющую свести вычисление данного интеграла к вычислению интеграла такого же типа, но с меньшим значением n. Например, для интеграла $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ $(n \in \mathbb{N})$ получена *формула понижения* степени

$$I_n = \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\frac{2n-3}{2n-2}\cdot I_{n-1}.$$

Зная интеграл $I_1 = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$, за конечное число шагов приходим к интегралу I_n (см. подробнее параграф 3.6). Обратимся к примерам.

Пример 2.5. Найти $\int x^3 \ln x dx$.

Решение. Так как дифференцирование $\ln x$ приводит к упрощению, положим $u = \ln x$, $dv = x^3 dx$. Тогда $du = \frac{dx}{x}$, $v = \frac{1}{4}x^4$ и, интегрируя по частям, находим

$$\int x^3 \ln x dx = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{4}\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4 + C \ (x>0).$$

Пример 2.6. Найти $\int x^2 \sin x dx$.

Решение. Имеем

$$\int x^2 d(-\cos x) = -x^2\cos x - \int(-\cos x)d(x^2) =$$
$$= -x^2\cos x + 2\int x\cos x dx = -x^2\cos x + 2(x\sin x - \int \sin x dx) =$$
$$= -x^2\cos x + 2(x\sin x + \cos x) + C.$$

В общей сложности здесь правило интегрирования по частям пришлось применить дважды.

Пример 2.7. Найти $\int e^{ax}\sin bx dx$ $(a \neq 0)$.

Решение. Интегралы вида $\int e^{ax}\sin bx dx$, $\int e^{ax}\cos bx dx$ вычисляются двукратным интегрированием по частям. В результате получается уравнение относительно неизвестного интеграла. В данном случае положим $u = \sin bx$, $dv = e^{ax}dx$. Тогда $du = b\cos bx dx$, $v = \frac{1}{a}e^{ax}$ и имеем

$$\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx dx.$$

Еще раз проинтегрируем по частям образовавшийся справа интеграл, положив в нем $u = \cos bx$, $dv = e^{ax}dx$. Тогда $du = -b\sin bx dx$, $v = \frac{1}{a}e^{ax}$ и придем к результату

$$\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\left(\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx dx\right) =$$

$$= \frac{1}{a}e^{ax}\left(\sin bx - \frac{b}{a}\cos bx\right) - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin bx dx.$$

Обозначим теперь исходный интеграл через I. Тогда имеем уравнение относительно I:

$$I = \frac{1}{a}e^{ax}\left(\sin bx - \frac{b}{a}\cos bx\right) - \frac{b^2}{a^2}I,$$

откуда выражаем

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2}I = \frac{1}{a}e^{ax}\left(\sin bx - \frac{b}{a}\cos bx\right),$$

т. е. $I = \frac{1}{a^2 + b^2}e^{ax}\left(a\sin bx - b\cos bx\right)$.

Окончательно имеем

$$\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{1}{a^2 + b^2}e^{ax}\left(a\sin bx - b\cos bx\right) + C.$$

Пример 2.8. Найти $\int \arcsin x dx$.

Решение. Полагая $u = \arcsin x$, $dv = dx$ ($|x| \leqslant 1$), определяем $du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$, $v = x$. Следовательно,

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x - \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$

$$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2) =$$

$$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\cdot\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{1/2} + C = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

Пример 2.9. Найти $\int x^2 \arccos x dx$.

Решение. Положим $u = \arccos x$, $x^2 dx = dv$. Тогда

$$\int x^2 \arccos x dx = \int \arccos x d\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{x^3}{3}\arccos x + \frac{1}{3}\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Образовавшийся в правой части интеграл еще раз проинтегрируем по частям, положив на этот раз $u = x^2$, $dv = \frac{-xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ ($|x| < 1$):

$$\frac{x^3}{3}\arccos x - \frac{1}{3}\int x^2 d(\sqrt{1-x^2}) =$$

$$= \frac{x^3}{3}\arccos x - \frac{x^2}{3}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{3}\int \sqrt{1-x^2} d(x^2) =$$

$$= \frac{x^3}{3}\arccos x - \frac{x^2}{3}\sqrt{1-x^2} - \frac{2}{9}\sqrt{(1-x^2)^3} + C.$$

Пример 2.10. Найти $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^3} dx$.

Решение. Положим $u = \operatorname{arctg} x$, $\frac{dx}{x^3} = dv$. Тогда $u' = \frac{1}{x^2 + 1}$, $v = -\frac{1}{2x^2}$ и

$$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^3} dx = \int \operatorname{arctg} x d\left(-\frac{1}{2x^2}\right) = \operatorname{arctg} x \cdot \left(-\frac{1}{2x^2}\right) - \int \left(-\frac{1}{2x^2}\right)\cdot\frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= -\frac{1}{2x^2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)} = -\frac{1}{2x^2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\int \frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(x^2+1)} dx =$$

$$= -\frac{1}{2x^2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\left(\int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x^2+1}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2x^2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x\right) + C = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x \cdot \left(\frac{1}{x^2} + 1\right) - \frac{1}{2x} + C.$$

Пример 2.11. Найти $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$ $(a > 0)$.

Решение. Положим $u=\sqrt{a^2-x^2}$, $dv = dx$, откуда $du=-\dfrac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, $v = x$. Следовательно,

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=x\sqrt{a^2-x^2}-\int\frac{-x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=x\sqrt{a^2-x^2}-\int\frac{a^2-x^2-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=$$

$$=x\sqrt{a^2-x^2}-\int\sqrt{a^2-x^2}dx+a^2\arcsin\frac{x}{a}.$$

Выражая из полученного равенства искомый интеграл, находим окончательно

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

Пример 2.12. Найти $\int\sqrt{x^2+k}dx$ $(k \neq 0)$.

Решение. Положим $u=\sqrt{x^2+k}$, $dv = dx$. Тогда

$$I=\int\sqrt{x^2+k}dx=x\sqrt{x^2+k}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+k}}=x\sqrt{x^2+k}-\int\frac{x^2+k-k}{\sqrt{x^2+k}}dx=$$

$$=x\sqrt{x^2+k}+k\ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right|+I.$$

Отсюда находим окончательно, выражая I:

$$\int\sqrt{x^2+k}dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+k}+\frac{k}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right|+C.$$

Если подынтегральная функция содержит трансцендентную функцию (логарифмическую, показательную, обратную тригонометрическую, гиперболическую и пр.) сложного аргумента $\varphi(x)$, то часто для упрощения подынтегрального выражения бывает полезно сделать замену, приняв этот аргумент за новую переменную интегрирования.

Пример 2.13. Найти $\int\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$.

Решение. Положим $t=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $(0 < t \leqslant 1)$, тогда $x = \dfrac{1}{t^2}$ и $dx = -\dfrac{2dt}{t^3}$. Получаем интеграл $-2\int\dfrac{\arcsin t}{t^3}dt$. Интегрируя по частям, приняв $u = \arcsin t$, $du=\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, $dv = t^{-3}dt$, $v = -\dfrac{1}{2t^2}$, имеем

$$-2\int\frac{\arcsin t}{t^3}dt=\int\arcsin t\,d\left(\frac{1}{t^2}\right)=\frac{\arcsin t}{t^2}-\int\frac{dt}{t^2\sqrt{1-t^2}}=$$

$$=\frac{\arcsin t}{t^2}+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(\frac{1}{t^2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}=\frac{\arcsin t}{t^2}+\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}+C.$$

Таким образом,

$$\int\arcsin\frac{1}{\sqrt{x}}dx=x\arcsin\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x-1}+C.$$

Пример 2.14. Найти $\int e^{-\sqrt[3]{x+1}}dx$.

Решение. Положим $t=-\sqrt[3]{x+1}$, тогда $x = -1 - t^3$, $dx = -3t^2dt$ и $\int e^{-\sqrt[3]{x+1}}dx = -3\int e^t t^2 dt$. Интегрируя по частям, получаем

$$-3(e^t t^2 - 2\int te^t dt) = -3(e^t t^2 - 2te^t + 2e^t) + C =$$

$$= -3t^2e^t + 6te^t - 6e^t + C,$$

где $t=-\sqrt[3]{x+1}$.

Пример 2.15. Найти $\int\cos(\ln x)dx$.

Решение. Положим $t = \ln x$, тогда $x = e^t$, $dx = e^t dt$ и интеграл принимает вид $\int e^t\cos t\,dt$. Проинтегрируем его по частям:

$$I = \int e^t d(\sin t) = e^t\sin t - \int e^t\sin t\,dt = e^t\sin t + \int e^t d(\cos t) =$$

$$= e^t\sin t + (e^t\cos t - \int e^t\cos t\,dt) = e^t(\sin t + \cos t) - I.$$

Выражая из полученного равенства I и приписывая константу C, окончательно находим

$$I = \frac{1}{2}e^t(\sin t + \cos t) + C = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)) + C.$$

Можно было вычислить этот интеграл, и не прибегая к предварительной замене переменной, а сразу непосредственно интегрируя по частям. Так, положим $u = \cos(\ln x)$, $dv = dx$, тогда

$$I = \int\cos(\ln x)dx = x\cdot\cos(\ln x) - \int x\cdot\left(-\sin(\ln x)\cdot\frac{1}{a}\right)dx =$$

$$= x\cdot\cos(\ln x) + \int\sin(\ln x)dx.$$

Еще раз проинтегрируем получившийся интеграл по частям:

$$I = x\cdot\cos(\ln x) + x\cdot\sin(\ln x) - \int x\cdot\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{a}dx =$$
$$= x\cdot(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) - I,$$

откуда находим

$$I = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)) + C.$$

Пример 2.16. Найти $\int\frac{xdx}{\sin^2 x}$.

Решение. Полагая и интегрируя по частям, получим

$$\int\frac{xdx}{\sin^2 x} = -x\operatorname{ctg}x + \int\operatorname{ctg}x dx = -x\operatorname{ctg}x + \int\frac{\cos x dx}{\sin x} =$$
$$= -x\operatorname{ctg}x + \int\frac{d(\sin x)}{\sin x} = -x\operatorname{ctg}x + \ln|\sin x| + C\ (x \neq \pi n,\ n \in \mathbb{Z}).$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти неопределенные интегралы:

2.1. $\int\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}dx$. **2.2.** $\int 2^{3x-1}dx$. **2.3.** $\int\frac{dx}{3 - 5x}$.

2.4. $\int xe^{x^2}dx$. **2.5.** $\int x\cos x dx$. **2.6.** $\int x^2e^x dx$.

2.7. $\int\frac{dx}{\sqrt{8 - x^2}}$. **2.8.** $\int\operatorname{ctg}^2 x dx$. **2.9.** $\int(2x + |x|)dx$.

2.10. $\int\frac{\sqrt{x} + \ln x}{x}dx$. **2.11.** $\int\frac{3x + 1}{5x^2 + 1}dx$. **2.12.** $\int\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$.

2.13. $\int x\sin(1 - x^2)dx$. **2.14.** $\int\sin^3(2x)dx$. **2.15.** $\int\frac{dx}{\sin x}$.

2.16. $\int\frac{1 - \sin x}{x + \cos x}dx$. **2.17.** $\int\frac{\sin 2x}{\sqrt{2 - \sin^4 x}}dx$.

2.18. $\int(5x - 2)^7dx$. *Указание:* сделать подстановку $t = 5x - 2$.

2.19. $\int\sqrt{4 - x^2}dx$. *Указание:* сделать подстановку $x = 2\sin t$, $|t| \leqslant \frac{\pi}{2}$.

2.20. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$. *Указание:* сделать подстановку $t=\sqrt{2x+1}$.

2.21. $\int xe^x dx$.

2.22. $\int x^2 \ln^2 x dx$. *Указание:* дважды проинтегрировать по частям.

2.23. $\int e^x \cos x dx$. **2.24.** $\int \sqrt{2\sqrt[3]{3x}}\, dx$. **2.25.** $\int (x^{2/3} +)^3 dx$.

2.26. $\int (2^{x+3} - 5^{2x-1}) dx$. **2.27.** $\int \frac{x^5 + x^3 + 3}{x^2 + 1} dx$.

2.28. $\int (x + |x|)^2 dx$. **2.29.** $\int x f''(x) dx$. **2.30.** $\int f'(2x) dx$.

2.31. $\int f(x)dx$, если $f(x) = \begin{cases} 1 + x, x < 0, \\ 1 - x^3, x \geqslant 0. \end{cases}$

Глава 3
ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Остановимся подробнее на некоторых из наиболее изученных классов интегрируемых функций и существующих методах их интегрирования. В данном параграфе речь пойдет об интегрировании алгебраических рациональных функций. Вначале рассмотрим некоторые из наиболее часто встречающихся типов интегралов от рациональных функций и уже затем — общий подход к интегрированию таких дробей.

3.1. Интегралы вида $\int \frac{ax+b}{cx+d}dx$ $(ac \neq 0,\ cx+d \neq 0)$

Интеграл от дробно-линейной функции легко сводится к сумме двух табличных интегралов выделением в подынтегральной дроби рациональной части:

$$\int \frac{ax+b}{cx+d}dx = \int \frac{\frac{a}{c}(cx+d)+b-\frac{ad}{c}}{cx+d}dx = \frac{a}{c}x + \left(b-\frac{ad}{c}\right)\int \frac{dx}{cx+d} =$$

$$= \frac{a}{c}x + \frac{bc-ad}{c^2}\int \frac{dx}{x+\frac{d}{c}} = \frac{a}{c}x + \frac{bc-ad}{c^2}\ln\left|x+\frac{d}{c}\right| + C.$$

Пример 3.1. Найти $\int \frac{2x+1}{3x-2}dx$.

Решение. Вычисляем:

$$\int \frac{2x+1}{3x-2}dx = \int \frac{\frac{2}{3}(3x-2)+\frac{7}{3}}{3x-2}dx = \frac{2}{3}\int dx + \frac{7}{9}\int \frac{d(3x-2)}{3x-2} =$$

$$= \frac{2}{3}x + \frac{7}{9}\ln|3x-2| + C \ \ (x \neq \frac{2}{3}).$$

3.2. Интегралы вида $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$ $(a \neq 0)$

Выделением полного квадрата в квадратном трехчлене интегралы данного вида приводятся к одному из двух типов табличных интегралов:

$$\int \frac{dt}{t^2 + A^2} = \frac{1}{A} \operatorname{arctg} \frac{t}{A} + C \text{ или } \int \frac{dt}{t^2 - A^2} = \frac{1}{2A} \ln \left| \frac{t - A}{t + A} \right| + C.$$

Пример 3.2. Найти $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 13}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 13} = \int \frac{dx}{(x+2)^2 + 9} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{3} + C.$$

Пример 3.3. Найти $\int \frac{dx}{x^2 - 6x - 16}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{x^2 - 6x - 16} = \int \frac{dx}{(x-3)^2 - 25} = \frac{1}{10} \ln \left| \frac{(x-3)-5}{(x-3)+5} \right| + C = \frac{1}{10} \ln \left| \frac{x-8}{x+2} \right| + C.$$

3.3. Интегралы вида $\int \frac{dx}{(x + a)(x + b)}$ $(a \neq b)$

Наряду со способом, изложенным выше в параграфе 3.2, для вычисления интегралов данного вида можно воспользоваться следующим очевидным тождеством: $a - b = (x + a) - (x + b)$, тогда имеем

$$\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b} \int \frac{(x+a)-(x+b)}{(x+a)(x+b)} dx =$$

$$= \frac{1}{a-b} \left(\int \frac{dx}{x+b} - \int \frac{dx}{x+a} \right) = \frac{1}{a-b} \ln \left| \frac{x+b}{x+a} \right| + C.$$

Пример 3.4. Найти $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$ $(a \neq 0)$.

Решение. Вычисляем:

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \int \frac{dx}{(x+a)(x-a)} = \frac{1}{2a} \cdot \int \frac{(x+a)-(x-a)}{(x+a)(x-a)} dx =$$
$$= \frac{1}{2a}\left(\int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x+a} \right) = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \; (x \neq \pm a).$$

Пример 3.5. Найти $\int \frac{dx}{x^2+x-2}$.

Решение. Вычисляем:

$$\frac{1}{x^2+x-2} = \frac{1}{(x-1)(x+2)} = -\frac{(x+2)-(x-1)}{3(x-1)(x+2)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right),$$

следовательно,

$$\int \frac{dx}{x^2+x-2} = \frac{1}{3}\left(\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+2} \right) = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln|x+2| + C =$$
$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C \;\; (x \neq -2; 1).$$

3.4. Интегралы вида $\int \frac{dx}{(x+a)^m (x+b)^n}$ $(a \neq b;\, m, n \in \mathbb{N})$

Интегралы указанного вида берутся в том числе подстановкой $t = \frac{x+a}{x+b}$. Тогда $dt = \frac{b-a}{(x+b)^2} dx$,

$$\frac{1}{x+b} = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{(x+b)-(x+a)}{x+b} = \frac{1}{b-a} \cdot \left(1 - \frac{x+a}{x+b} \right) = \frac{1-t}{b-a}.$$

Таким образом,

$$\frac{dx}{(x+a)^m (x+b)^n} = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{\left(\dfrac{x+a}{x+b} \right)^m \cdot (x+b)^{n+m-2}} \cdot \frac{b-a}{(x+b)^2} dx =$$
$$= \frac{1}{(b-a)^{n+m-1}} \cdot \frac{(1-t)^{n+m-2}}{t^m} dt.$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{(x+a)^m (x+b)^n} = \frac{1}{(b-a)^{n+m-1}} \int \frac{(1-t)^{n+m-2}}{t^m} dt. \qquad (3.1)$$

При $m = n = 2$ интеграл вычисляется при помощи тождества

$$1 \equiv \left(\frac{(x + a) - (x - b)}{a - b}\right)^2.$$

Имеем

$$\frac{1}{(x+a)^2(x+b)^2} = \left(\frac{(x+a)-(x+b)}{(a-b)(x+a)(x+b)}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{(a-b)^2}\left[\frac{1}{(x+b)^2} - \frac{2}{(a-b)}\left(\frac{1}{x+b} - \frac{1}{x+a}\right) + \frac{1}{(x+a)^2}\right].$$

Тогда

$$\int\frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2} = \frac{1}{(a-b)^2}\left(-\frac{1}{x+b} - \frac{2}{a-b}\ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right| - \frac{1}{x+a}\right) + C =$$

$$= -\frac{a+b+2x}{(a-b)^2(x+a)(x+b)} + \frac{2}{(a-b)^3}\ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right| + C\ (x \neq -a, x \neq -b).$$

Пример 3.6. Найти $\int \frac{dx}{(x - 2)^2(x + 3)^2}$.

Решение. Положим $t = \frac{x - 2}{x + 3}$ и, применяя формулу (3.1), где $a = -2$, $b = 3$, $m = 2$, $n = 3$, получим

$$\int\frac{dx}{(x-2)^2(x+3)^3} = \frac{1}{625}\int\frac{(1-t)^3}{t^2}\,dt = \frac{1}{625}\int\left(\frac{1}{t^2} - \frac{3}{t} + 3 - t\right)dt =$$

$$= \frac{1}{625}\left(-\frac{1}{t} - 3\ln|t| + 3t - \frac{t^2}{2}\right) + C,$$

где $t = \frac{x - 2}{x + 3}$ $(x \neq 2, x \neq -3)$.

Пример 3.7. Найти $\int \frac{dx}{(x + 2)^2(x - 3)^2}$.

Решение. Вычисляем:

$$\int\frac{dx}{(x+2)^2(x-3)^2} = \int\left(\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+2}\right)\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{25}\int\frac{dx}{(x-3)^2} + \frac{1}{25}\int\frac{dx}{(x+2)^2} - \frac{2}{25}\int\frac{dx}{(x-3)(x+2)} =$$

$$=-\frac{1}{25(x-3)}-\frac{1}{25(x+2)}-\frac{2}{125}\int\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+2}\right)dx=$$

$$=-\frac{1}{25(x-3)}-\frac{1}{25(x+2)}-\frac{2}{125}\ln|x-3|+\frac{2}{125}\ln|x+2|+C$$

$$(x\neq-2;3).$$

3.5. Интегралы вида $\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$ $(a\neq 0)$

Эти интегралы вычисляются выделением в числителе дроби выражения, равного производной знаменателя дроби:

$$\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx=\int\frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)}{ax^2+bx+c}dx=$$

$$=\frac{A}{2a}\int\frac{d(ax^2+bx+c)}{ax^2+bx+c}+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\cdot\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=$$

$$=\frac{A}{2a}\int\frac{d(ax^2+bx+c)}{ax^2+bx+c}+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\cdot I,$$

где интеграл $I=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$ вычисляется способом, рассмотренным в параграфе 3.2.

Пример 3.8. Найти $\int\frac{x+2}{x^2+2x+5}dx.$

Решение. Так как $(x^2+2x+5)'=2(x+1)$, имеем

$$\int\frac{x+2}{x^2+2x+5}dx=\int\frac{x+2}{(x+1)^2+4}dx=\int\frac{(x+1)+1}{(x+1)^2+4}dx=$$

$$=\int\frac{x+1}{(x+1)^2+4}dx+\int\frac{dx}{(x+1)^2+4}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+2x+5)}{x^2+2x+5}+\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+2^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+5|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C.$$

Пример 3.9. Найти $\int\frac{x+2}{x^2+2x-3}dx.$

Решение. Вычисляем:

$$\int\frac{x+2}{x^2+2x-3}dx=\int\frac{(x+1)+1}{(x+1)^2-4}dx=\int\frac{x+1}{(x+1)^2-4}dx+\int\frac{dx}{(x+1)^2-4}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+2x-3)}{x^2+2x-3}+\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2-4}=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x-3\right|+\frac{1}{4}\ln-\left|\frac{x+1}{x+3}\right|+C.$$

3.6. Интегралы вида $\int\frac{dx}{(x^2+bx+c)^n}$ $(n\in\mathbb{N},\ n\geqslant 2;\ b^2-4ac<0)$

Выделением полного квадрата $x^2+bx+c=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+c-\frac{b^2}{4}$ и заменой $z=x+\frac{b}{2}$ интеграл приводится к виду

$$I_n=\int\frac{dz}{(a^2+z^2)^n}.$$

Для вычисления последнего интеграла используется подстановка $z=a\cdot\operatorname{tg}u$ или выводится рекуррентное соотношение, позволяющее понизить степень n в знаменателе интегрированием по частям. Действительно, представляя I_n в виде комбинации I_{n-1} и $\int\frac{z^2dz}{(a^2+z^2)^n}$ и вычисляя последний из интегралов интегрированием по частям, получим

$$I_n=\int\frac{dz}{(a^2+z^2)^n}=\frac{1}{a^2}\int\frac{(a^2+z^2)-z^2}{(a^2+z^2)^n}dz=\frac{1}{a^2}I_{n-1}-\frac{1}{a^2}\int z\frac{zdz}{(a^2+z^2)^n}=$$

$$=\frac{1}{a^2}I_{n-1}-\frac{1}{a^2}\int zd\left(\frac{1}{2(1-n)}\cdot\frac{1}{(a^2+z^2)^{n-1}}\right)=$$

$$=\frac{1}{a^2}I_{n-1}+\frac{z}{2a^2(n-1)(a^2+z^2)^{n-1}}-\frac{1}{2(n-1)a^2}\int\frac{dz}{(a^2+z^2)^{n-1}}=$$

$$=\frac{z}{2a^2(n-1)(a^2+z^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2a^2(n-1)}I_{n-1}.\qquad(3.2)$$

Зная интеграл $I_1=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{z}{a}+C$, по формуле (3.2) при $n=2$ получаем

$$I_2 = \frac{z}{2a^2(a^2+z^2)^{n-1}} + \frac{1}{2a^2}I_1 =$$

$$= \frac{z}{2a^2(a^2+z^2)} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{z}{a} + C. \qquad (3.3)$$

Полагая $n = 3$ в формуле (3.2), получаем

$$I_3 = \frac{z}{4a^2(a^2+z^2)^2} + \frac{3}{4a^2}I_2 =$$

$$= \frac{z}{4a^2(a^2+z^2)^2} + \frac{3z}{8a^4(a^2+z^2)} + \frac{3}{8a^5}\operatorname{arctg}\frac{z}{a} + C \qquad (3.4)$$

и т. д. Таким образом можно вычислить интеграл I_n для любого натурального n.

Пример 3.10. Найти $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}$.

Решение. Вычисляем:

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(a^2+x^2)-x^2}{(a^2+x^2)^m}dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{a^2+x^2} - \frac{1}{a^2}\int x\frac{xdx}{(a^2+x^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2}\int xd\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2}\left(x\cdot\frac{1}{x^2+a^2} - \int\frac{dx}{x^2+a^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2}\left(x\cdot\frac{1}{x^2+a^2} - \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + C.$$

Можно было просто воспользоваться формулой (3.3). Наконец, можно было воспользоваться тригонометрической подстановкой $x = a\operatorname{tg}t$, где $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда $dx = \frac{adt}{\cos^2 t}$, $x^2 + a^2 = \frac{a^2}{\cos^2 t}$ и поэтому

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^3}\int \cos^2 t dt = \frac{1}{a^3}\int\frac{(1+\cos 2t)}{2}dt = \frac{1}{2a^3}(t + \sin t\cos t) + C.$$

Осталось сделать обратную подстановку:

$$t=\operatorname{arctg}\frac{x}{a};\ \sin t=\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)=\frac{\frac{x}{a}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}};$$

$$\cos t=\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

Поэтому искомый интеграл равен

$$\frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+\frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2+a^2}+C.$$

Пример 3.11. Найти $\int\frac{dx}{(1+x^2)^3}$.

Решение. Воспользуемся формулой (3.3) при $a=1$:

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^3}=\frac{x}{4(1+x^2)^2}+\frac{3x}{8(1+x^2)}+\frac{3}{8}\operatorname{arctg}x+C.$$

3.7. Интегралы вида $\int\frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^n}dx$ $(n\in\mathbb{N},\ n\geqslant 2;\ b^2-4ac<0)$

Для вычисления интегралов вида $\int\frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^n}dx$ (квадратное выражение в знаменателе дроби не имеет действительных корней) представим линейную функцию в числителе в виде комбинации производной квадратного трехчлена и некоторой константы, т. е.

$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^n}dx=\int\frac{\frac{A}{2}(2x+b)+B-\frac{Ab}{2}}{(x^2+bx+c)^n}dx=$$

$$=\frac{A}{2}\int\frac{d(x^2+bx+c)}{(x^2+bx+c)^n}+\left(B-\frac{Ab}{2}\right)\int\frac{dx}{(x^2+bx+c)^n}=$$

$$=\frac{A}{2}\cdot\frac{1}{1-n}\cdot\frac{1}{(x^2+bx+c)^{n-1}}+\left(B-\frac{Ab}{2}\right)J_n,$$

где $J_n = \int \frac{dx}{(x^2 + bx + c)^n}$.

Вычисление интеграла J_n рассматривалось выше в параграфе 3.6.

Пример 3.12. Найти $\int \frac{3x + 1}{(x^2 + x + 1)^2} dx$.

Решение. Вычисляем:

$$\int \frac{3x+1}{(x^2+x+1)^2} dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+1) - \frac{1}{2}}{(x^2+x+1)^2} dx =$$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{d(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)^2} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} =$$

$$= -\frac{3}{2(x^2+x+1)} - \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right)^2} =$$

$$= -\frac{3}{2(x^2+x+1)} - \frac{2x+1}{6\left(\frac{3}{4} + \left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right)} - \frac{1}{4\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

3.8. Метод алгебраических преобразований

Так как фундаментальный подход, основанный на разложении рациональной дроби на простейшие дроби (который будет изложен ниже в параграфе 3.9), часто требует громоздких выкладок, то при вычислении интегралов от рациональных функций при любой возможности полезно использовать альтернативные подходы в виде различных упрощающих алгебраических преобразований, вспомогательных замен переменных — всего того, что так или иначе упрощает вычисление интегралов. Рассмотрим примеры таких преобразований, в которых рациональные выражения интегрируются непосредственным сведением к табличным интегралам, часто путем использования различных искусственных приемов и иногда введения новых переменных.

Пример 3.13. Найти $\int x(1-2x)^{37}dx$.

Решение. Вычисляем:

$$\int\left(-\frac{1}{2}(1-2x)+\frac{1}{2}\right)(1-2x)^{37}dx=-\frac{1}{2}\int(1-2x)^{38}dx+\frac{1}{2}\int(1-2x)^{37}dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int(1-2x)^{38}d(1-2x)-\frac{1}{4}\int(1-2x)^{37}d(1-2x)=$$

$$=\frac{1}{156}(1-2x)^{39}-\frac{1}{152}(1-2x)^{38}+C.$$

Пример 3.14. Найти $\int x^3(1-5x^2)^{10}dx$.

Решение. Сделаем замену $t = 1 - 5x^2$, откуда $x^2 = \dfrac{1-t}{5}$, $2xdx = -\dfrac{1}{5}dt$, и в результате приходим к интегралу

$$\int\left(\frac{1-t}{5}\right)t\left(-\frac{dt}{10}\right)=\frac{1}{50}\int t^{11}dt-\frac{1}{50}\int t^{10}dt=$$

$$=\frac{t^{12}}{600}-\frac{t^{11}}{550}+C=\frac{(1-5x^2)^{12}}{600}-\frac{(1-5x^2)^{11}}{550}+C.$$

Пример 3.15. Найти $\int\dfrac{x^2dx}{(x+2)^{100}}$.

Решение. Выполним подстановку $t = x + 2$, которая позволяет сделать так, чтобы степень суммы оказалась не в знаменателе, а в числителе дроби, что существенно удобнее для вычисления данного интеграла:

$$\int\frac{(t-2)^2\,dt}{t^{100}}=\int\left(\frac{t^2-4t+4}{t^{100}}\right)dt=\int(t^{-98}-4t^{-99}+4t^{-100})dt=$$

$$=-\frac{t^{-97}}{97}+4\cdot\frac{t^{-98}}{98}-4\cdot\frac{t^{-99}}{99}+C=$$

$$=-\frac{1}{97(x+2)^{97}}+\frac{2}{49(x+2)^{98}}-\frac{4}{99(x+2)^{99}}+C\ \ (x\neq-2).$$

Пример 3.16. Найти $\int\dfrac{dx}{(x+2)^2(x-3)^2}$.

Решение. Вычисляем:

$$\int\frac{dx}{(x+2)^2(x-3)^2}=\int\left[\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+2}\right)\right]^2dx=$$

$$=\frac{1}{25}\int\frac{dx}{(x-3)^2}+\frac{1}{25}\int\frac{dx}{(x+2)^2}-\frac{2}{25}\int\frac{dx}{(x-3)(x+2)}=$$

$$=-\frac{1}{25(x-3)}-\frac{1}{25(x+2)}-\frac{2}{125}\int\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+2}\right)dx=$$

$$=-\frac{1}{25(x-3)}-\frac{1}{25(x+2)}-\frac{2}{125}\ln|x-3|+\frac{2}{125}\ln|x+2|+C$$

$$(x\neq -2;3).$$

Пример 3.17. Найти $\int\frac{xdx}{x^4+2x^2+5}$.

Решение. Преобразуя знаменатель дроби, получим x^4+2x^2+ $+5=(x^2+1)^2+4$. Выполним подстановку $t=x^2+1$, тогда $xdx=\frac{dt}{2}$. Отсюда для интеграла находим

$$\int\frac{xdx}{x^4+2x^2+5}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+4}=\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+C=\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x^2+1}{2}+C.$$

Пример 3.18. Найти $\int\frac{dx}{x^4-1}$.

Решение. Так как

$$\frac{1}{x^4-1}=\frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{2(x^2-1)(x^2+1)}=\frac{1}{2(x^2-1)}-\frac{1}{2(x^2+1)},$$

то имеем $\int\frac{dx}{x^4-1}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C\ (x\neq\pm 1)$.

Пример 3.19. Найти $\int\frac{dx}{x^3(x-1)^6}$.

Решение. $I=\int\frac{dx}{x^9\left(\frac{x-1}{x}\right)^6}$. Положим $t=\frac{x-1}{x}$, тогда имеем

$$\int\frac{(1-t)^7}{t^6}dt=\int\frac{1-7t+21t^2-35t^3+35t^4-21t^5+7t^6-t^7}{t^6}dt=$$

$$=\int\frac{dt}{t^6}-7\int\frac{dt}{t^5}+21\int\frac{dt}{t^4}-35\int\frac{dt}{t^3}+35\int\frac{dt}{t^2}-21\int\frac{dt}{t}+7\int dt-\int tdt=$$

$$=-\frac{1}{5t^5}+\frac{7}{4t^4}-\frac{7}{t^3}+\frac{35}{2t^2}-\frac{35}{t}-21\ln|t|+7t-\frac{t^2}{2}+C,$$

где $t=\frac{x-1}{x}$ $(x\neq 0;\ 1)$.

Пример 3.20. Найти $\int \frac{dx}{x(1-x^3)^2}$.

Решение. Вычисляем:

$$\int \frac{dx}{x(1-x^3)^2} = \int \frac{x^2dx}{x^3(1-x^3)^2} = \frac{1}{3}\int \frac{dx^3}{x^3(1-x^3)^2} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u(1-u)^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{1-u}\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{1-u}\right)du = \frac{1}{3}\int \frac{du}{(1-u)^2} + \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{1-u}\right)du =$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-u} + \frac{1}{3}\ln\left|\frac{u}{1-u}\right| + C = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^3-1} + \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3}{1-x^3}\right| + C \ \ (x \neq 0; 1).$$

Пример 3.21. Найти $\int \frac{dx}{x^3(x^2-2)}$.

Решение. Вычисляем:

$$\int \frac{dx}{x^3(x^2-2)} = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{x^4(x^2-2)} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2(u-2)} = -\frac{1}{4}\int \frac{u-2-u}{u^2(u-2)}du =$$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{du}{u^2} + \frac{1}{4}\int \frac{du}{u(u-2)} = \frac{1}{4u} + \frac{1}{8}\ln\left|\frac{u-2}{u}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{8}\ln\left|\frac{x^2-2}{x^2}\right| + C \ (x \neq 0; \pm\sqrt{2}).$$

Пример 3.22. Найти $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$.

Решение. Имеем

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \int \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}dx.$$

Так как $\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx = d\left(x-\frac{1}{x}\right)$ и $x^2+\frac{1}{x^2} = \left(x^2-2+\frac{1}{x^2}\right)+2 =$ $= \left(x-\frac{1}{x}\right)^2 + 2$, то приходим к интегралу

$$\int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} + C.$$

Пример 3.23. Найти $\int \frac{x^2 - 1}{(x^2 + x + 1)^2} dx.$

Решение. См. решение примера 1.5 из параграфа 1.2.

Пример 3.24. Найти $\int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 3x^2 + 1} dx.$

Решение. См. решение примера 1.6 из параграфа 1.2.

Пример 3.25. Найти $\int \frac{x^4 + 1}{x^6 - 1} dx.$

Решение. Вычисляем:

$$\int \frac{x^4+1}{x^6-1} dx = \int \frac{x^4+1-2x^2}{x^6-1} dx + 2\int \frac{x^2}{x^6-1} dx =$$

$$= \int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1} dx + \frac{2}{3}\int \frac{dx^3}{x^6-1} =$$

$$= \int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - 1} + \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3-1}{x^3+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-1}{x+\frac{1}{x}+1}\right| + \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right| +$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right| + \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right| + C \ \ (x \neq \pm 1).$$

3.9. Представление рациональной дроби в виде суммы простейших дробей с использованием метода неопределенных коэффициентов

Идея интегрирования рациональных дробей при помощи разложения их на простейшие дроби принадлежит, как отмечалось выше, Г. Лейбницу (1702—1703). Рассмотрим общий подход к интегрированию рациональных дробей, т. е. функций вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — целые алгебраические многочлены от x. Этот подход обычно применяют в случае, когда нет более простых приемов, позволяющих вычислить интеграл.

Интегрирование неправильной дроби. Если степень многочлена $P(x)$ больше или равна степени многочлена $Q(x)$ (иными словами, дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ неправильная), то делением многочлена $P(x)$ на многочлен $Q(x)$ вначале выделяют целую часть — многочлен $S(x)$, т. е. представляют дробь в виде $\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$, где степень многочлена $R(x)$ меньше степени многочлена $Q(x)$. Таким образом, интегрирование дробно-рациональной функции $\frac{P(x)}{Q(x)}$ в общем случае сводится к интегрированию многочлена $S(x)$ и правильной рациональной дроби $\frac{R(x)}{Q(x)}$.

Интегрирование правильной дроби. Рассмотрим интегрирование правильной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$, в которой степень многочлена $P(x)$ меньше степени многочлена $Q(x)$. Оно основано на представлении этой дроби конечной суммой простейших дробей.

1. Первое, что необходимо сделать, это выписать разложение дроби в сумму элементарных дробей. Вид этого разложения зависит от разложения знаменателя $Q(x)$ на множители. Известно, что алгебраический многочлен любой степени раскладывается на сомножители линейного $(x - a)$ и (или) квадратичного вида $x^2 + bx + c$. Предположим, что в разложении $Q(x)$ на множители присутствует сомножитель линейного вида в n-й степени: $(x-a)^n$ (a — действительный корень многочлена кратности n). Тогда ему будет соответствовать сумма ровно n простейших дробей:

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \frac{A_3}{(x-a)^3} + \ldots + \frac{A_n}{(x-a)^n}, \qquad (3.5)$$

где A_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, — некоторые постоянные. Если сомножителей линейного типа в разложении многочлена $Q(x)$ несколько, то каждому из них соответствует аналогичная сумма.

Каждому сомножителю квадратичного вида в m-й степени $(x^2 + bx + c)^m$, где трехчлен $x^2 + bx + c$ не имеет действительных корней, соответствуют, в свою очередь, m простейших дробей:

$$\frac{M_1x + N_1}{x^2 + bx + c} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + bx + c)^2} + \\ + \frac{M_3x + N_3}{(x^2 + bx + c)^3} + \ldots + \frac{M_mx + N_m}{(x^2 + bx + c)^m}, \qquad (3.6)$$

где M_i, N_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, — постоянные.

Таким образом выписывается представление дроби $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ в виде конечной суммы элементарных дробей вида (3.5) и (3.6):

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\frac{A_3}{(x-a)^3}+\ldots+\frac{A_n}{(x-a)^n}+\ldots+\frac{M_1x+N_1}{x^2+bx+c}+$$
$$+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+bx+c)^2}+\frac{M_3x+N_3}{(x^2+bx+c)^3}+\ldots+\frac{M_mx+N_m}{(x^2+bx+c)^m}. \qquad (3.7)$$

2. Далее *методом неопределенных коэффициентов* находятся постоянные A_k, M_i, N_i, ... ($k = 1, 2, ..., n$; $i = 1, 2, ..., m$; ...). Для этого все простейшие дроби в правой части равенства (3.7) приводятся к общему знаменателю (этим знаменателем будет многочлен $Q(x)$, как и в левой части). При этом в числителе полученной в результате дроби окажется некоторый многочлен $T(x)$, у которого коэффициенты при различных степенях x зависят от неизвестных A_k, M_i, N_i, ... Поскольку две рациональные дроби $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ и $\dfrac{T(x)}{Q(x)}$ с одинаковыми знаменателями тождественно равны (т. е. равны сразу при всех допустимых значениях x) тогда и только тогда, когда равны их числители, то осталось записать условие тождественного равенства многочленов $P(x)$ и $T(x)$. В свою очередь, два многочлена тождественно равны тогда и только тогда, когда равны их степени и коэффициенты при одинаковых степенях x. Приравнивая эти коэффициенты, составляют систему алгебраических уравнений, в которой количество неизвестных (неопределенных коэффициентов) совпадает с количеством уравнений системы. Затем эта система решается (достаточно подобрать одно какое-либо решение), и, таким образом, неопределенные ранее коэффициенты оказываются найденными.

3. После этого найденные значения коэффициентов A_k, M_i, N_i, ... подставляются в разложение (3.7), и интегрирование рациональной дроби $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ оказывается в результате сведено к интегрированию суммы элементарных дробей (3.7). Осталось рассмотреть завершение процедуры интегрирования.

Итак, интегрирование правильной рациональной дроби сводится к интегрированию дробей вида:

А) $\dfrac{A}{x-a}$; Б) $\dfrac{A}{(x-a)^n}$ $(n \geqslant 2, n \in \mathbb{N})$; В) $\dfrac{Mx+N}{x^2+bx+c}$;

Г) $\dfrac{Mx+N}{(x^2+bx+c)^m}$ $(m \geqslant 2, m \in \mathbb{N})$.

Вычисление интегралов от указанных дробей осуществляется следующим образом:

А) $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}dx = A \cdot \ln|x-a| + C$;

Б) $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = -\frac{A}{n-1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C$ $(n \geqslant 2, n \in \mathbb{N})$;

В)

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+bx+c}dx = \int \frac{\frac{M}{2}(2x+b)+N-\frac{Mb}{2}}{x^2+bx+c}dx =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d(x^2+bx+c)}{x^2+bx+c} + \left(N-\frac{Mb}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4}\right)} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left|x^2+bx+c\right| + \frac{(N-Mb/2)}{\sqrt{c-b^2/4}} \cdot \operatorname{arctg}\frac{x+\frac{b}{2}}{\sqrt{c-b^2/4}} + C$$

(так как $x^2 + bx + c$ не имеет действительных корней, то $c - \dfrac{b^2}{4} > 0$).

Г) Вычисление интегралов вида $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{(x^2+bx+c)^m}dx$ $(m \geqslant 2, m \in \mathbb{N})$ было рассмотрено в параграфе 3.7.

Рассмотрим применение данного метода на примерах.

Пример 3.26. Найти $\displaystyle\int \frac{xdx}{(x+1)(x-2)^2}$.

Решение. Разложение дроби $\dfrac{x}{(x+1)(x-2)^2}$ в сумму простейших дробей ищем в виде

$$\frac{x}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}. \qquad (3.8)$$

Приводя дроби в правой части равенства (3.8) к общему знаменателю, имеем

$$\frac{x}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{A(x-2)^2 + B(x+1)(x-2) + C(x+1)}{(x+1)(x-2)^2}.$$

Приравнивая числители дробей, получаем тождество

$$x = A(x-2)^2 + B(x+1)(x-2) + C(x+1). \qquad (3.9)$$

Приведем многочлен в правой части к стандартному виду, упорядочив степени x в порядке убывания:

$$x = (A+B)x^2 + (C-B-4A)x + (4A-2B+C).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему трех уравнений с тремя неизвестными A, B, C:

$$\begin{cases} A+B=0, \\ C-B-4A=1, \\ 4A-2B+C=0, \end{cases}$$

решая которую, находим неопределенные коэффициенты: $A = -\frac{1}{9}$, $B = \frac{1}{9}$, $C = \frac{2}{3}$. Наконец, подставим найденные коэффициенты в разложение (3.8) и проинтегрируем, разбивая интеграл на сумму трех табличных интегралов:

$$\int \frac{xdx}{(x+1)(x-2)^2} = -\frac{1}{9}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{9}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{(x-2)^2} =$$

$$= \frac{1}{9}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x-2} + C \ (x \neq -1, x \neq 2).$$

Иногда полезно в равенство, полученное приравниванием многочлена $P(x)$ к числителю $T(x)$ дроби, полученной после приведения к общему знаменателю простейших дробей, подставлять вместо x некоторые специально подобранные числа (обычно это действительные корни знаменателя $Q(x)$ данных дробей). В результате получаются линейные уравнения относительно искомых коэффициентов, хотя следует помнить, что при подстановке произвольных чисел полученные уравнения могут оказаться зависимыми.

Применим данный прием к предыдущему примеру. Для этого, не приводя многочлен в правой части тождества (3.9) к стандартному виду, положим в нем последовательно вначале $x = 2$ и найдем при этом $2 = 3C$, откуда $C = \frac{2}{3}$; затем положим $x = -1$, получим, что $-1 = 9A$, а значит, $A = -\frac{1}{9}$; наконец, положим в тождестве (3.9) $x = 0$ (не корень многочлена $Q(x)$, но тоже достаточно удобное для подстановки число). В результате имеем $0 = 4A - 2B + C$, откуда с учетом найденных ранее $A = -\frac{1}{9}$ и $C = \frac{2}{3}$ определяем $B = \frac{4A + C}{2} = \frac{1}{9}$. И далее интегрируем по описанной выше схеме.

Пример 3.27. Найти $\int \frac{3x^2 - x + 2}{(x^2 + 1)^2(x - 1)} dx$.

Решение. Разложение дроби $\frac{3x^2 - x + 2}{(x^2 + 1)^2(x - 1)}$ в сумму простейших дробей ищем в виде

$$\frac{3x^2 - x + 2}{(x^2 + 1)^2(x - 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 1)^2}.$$

Коэффициенты A, B, C, D, E определим исходя из тождества

$$3x^2 - x + 2 = A(x^2 + 1)^2 + (Bx + C)(x - 1)(x^2 + 1) +$$
$$+ (Dx + E)(x - 1).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ -B + C = 0, \\ 2A - C + D + B = 3, \\ C - B + E - D = -1, \\ A - C - E = 2. \end{cases}$$

Полагая $x = 1$, находим $A = 1$. Решая систему с учетом $A = 1$, определяем остальные коэффициенты: $B = -1$, $C = -1$, $D = -1$, $E = 0$. Следовательно,

$$\int \frac{3x^2-x+2}{(x^2+1)^2(x-1)}dx = \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{x+1}{x^2+1}dx + \int \frac{xdx}{(x^2+1)^2} =$$
$$= \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| - \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1} + C \quad (x \neq 1).$$

Пример 3.28. Найти $\int \frac{x^3 + 3x^2 + 5x + 7}{x^2 + 2}dx.$

Решение. Выделим целую часть неправильной рациональной дроби:

$$\begin{array}{r|l} -\,x^3+3x^2+5x+7 & x^2+2 \\ \underline{x^3+2x} & \overline{x+3} \\ -\,3x^2+3x+7 & \\ \underline{3x_2+6} & \\ 3x+1 & \end{array}$$

Таким образом,

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 5x + 7}{x^2 + 2} = x + 3 + \frac{3x + 1}{x^2 + 2}.$$

Подставляя полученное представление под знак интеграла, вычисляем интеграл:

$$\int \frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}dx = \int (x+3)dx + \int \frac{(3x+1)}{x^2+2}dx =$$
$$= \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{3}{2}\int \frac{2xdx}{x^2+2} + \int \frac{dx}{x^2+2} =$$
$$= \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{3}{2}\ln(x^2+2) + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

Пример 3.29. Найти $\int \frac{dx}{x^4 + 1}.$

Решение. Разложим многочлен в знаменателе на множители:

$$x^4+1 = (x^4+2x^2+1) - 2x^2 = (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 =$$
$$= (x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1),$$

а затем представим подынтегральную функцию в виде суммы:

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x\sqrt{2}+1}.$$

Используя метод неопределенных коэффициентов, найдем $A=\frac{1}{2\sqrt{2}}, B=\frac{1}{2}, C=-\frac{1}{2\sqrt{2}}, D=\frac{1}{2}$. Задача оказалась сведена к следующему вычислению:

$$\int\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x+\frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}dx+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\right)-$$

$$-\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}dx-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}[\mathrm{arctg}(x\sqrt{2}+1)+\mathrm{arctg}(x\sqrt{2}-1)]+C.$$

Пример 3.30. Найти $\int\frac{dx}{x^6+1}$.

Решение. Сначала преобразуем подынтегральную функцию:

$$\frac{1}{x^6+1}=\frac{(x^4+1)+(x^4-1)}{2(x^6+1)}=\frac{(x^4+1)}{2(x^6+1)}-\frac{(x^4-1)}{2(x^6+1)}=$$

$$=\frac{(x^4-x^2+1)+x^2}{2(x^6+1)}+\frac{(1-x^2)(1+x^2)}{2(x^6+1)}=$$

$$=\frac{1}{2(x^2+1)}+\frac{x^2}{2(x^6+1)}+\frac{1-x^2}{2(x^4-x^2+1)}.$$

Интегралы от первых двух слагаемых равны, соответственно, $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,x + C_1$ и $\frac{1}{6}\mathrm{arctg}(x^3) + C_2$.

Вычислим интеграл от третьего слагаемого. Для этого, учитывая, что

$$x^4-x^2+1=(x^4+2x^2+1)-(\sqrt{3}x)^2=(x^2+\sqrt{3}x+1)(x^2-\sqrt{3}x+1),$$

разложим дробь на сумму элементарных дробей:

$$\frac{1-x^2}{2(x^4-x^2+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{3}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{3}x+1}.$$

Приводя дроби к общему знаменателю, получим тождество

$$-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}=(Ax+B)(x^2-\sqrt{3}x+1)+(Cx+D)(x^2+\sqrt{3}x+1),$$

откуда имеем:

x^3: $0=A+C$;

x^2: $-\dfrac{1}{2}=-\sqrt{3}A+B+\sqrt{3}C+D$;

x^1: $0=A-\sqrt{3}B+C+\sqrt{3}D$;

x^0: $\dfrac{1}{2}=B+D$.

Решая систему, находим $A=-C=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}, B=D=\dfrac{1}{4}$.

Подставляя в разложение, получим

$$\frac{1-x^2}{2(x^4-x^2+1)}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{x+\frac{\sqrt{3}}{2}}{x^2+\sqrt{3}x+1}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{x-\frac{\sqrt{3}}{2}}{x^2-\sqrt{3}x+1}.$$

Интегрируя, приходим к окончательному ответу:

$$\int\frac{dx}{x^6+1}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{6}\operatorname{arctg}(x^3)+\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1}\right|+C.$$

3.10. Метод Остроградского

Еще один метод, используемый при интегрировании правильной несократимой рациональной дроби $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, носит название *метода Остроградского*[1]. Суть этого метода состоит в выделении рациональной части первообразной.

Пусть многочлен $Q(x)$, расположенный в знаменателе интегрируемой дроби, имеет кратные корни, включая и комплекс-

[1] Метод назван в честь *Михаила Васильевича Остроградского* (1801—1861) — русского математика, члена Петербургской академии наук, одного из основателей Петербургской математической школы. Его основные труды относятся к математическому анализу, теоретической механике, математической физике.

ные (чем выше кратность корней, тем эффективнее, вообще говоря, оказывается данный метод в сравнении с методом неопределенных коэффициентов). Разложим этот многочлен $Q(x)$ на произведение линейных и квадратичных сомножителей. Составим многочлен $Q_2(x)$ так, чтобы каждый корень многочлена $Q(x)$ являлся бы корнем многочлена $Q_2(x)$, но входил бы в этот многочлен с кратностью 1. Других корней у многочлена $Q_2(x)$, отличных от корней многочлена $Q(x)$, нет.

Определим теперь многочлен $Q_1(x)$ так, чтобы $Q_1(x) \cdot Q_2(x) = Q(x)$, т. е. каждый корень многочлена $Q(x)$, если первоначально он имел кратность n ($n \in \mathbb{N}$), войдет с кратностью, равной 1, в многочлен $Q_2(x)$, и с оставшейся после этого кратностью $(n - 1)$ — в многочлен $Q_1(x)$. В частности, все простые (кратности 1) корни многочлена $Q(x)$ будут корнями $Q_2(x)$ и не будут корнями $Q_1(x)$. Далее, введем в рассмотрение еще два многочлена $P_1(x)$ и $P_2(x)$, записав их в общем виде с неопределенными коэффициентами, причем их степени на единицу меньше соответственно степеней многочленов $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$. Тогда справедлива *формула Остроградского*

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx. \tag{3.10}$$

Чтобы с ее помощью вычислить интеграл в левой части, необходимо вначале продифференцировать по x это равенство:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \left(\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\right)' + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)},$$

и затем, приведя дроби в правой части равенства к общему знаменателю, найти неопределенные коэффициенты методом с аналогичным названием и закончить интегрирование по формуле (3.10). Обратимся к примерам.

Пример 3.31. Найти $\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)^3}$.

Решение. Под знаком интеграла видим правильную дробь, знаменатель которой $Q(x) = (x - 1)^2(x + 1)^3$. Находим, что $Q_2(x) = (x-1)(x + 1)$, и тогда $Q_1(x) = \dfrac{Q(x)}{Q_2(x)} = (x-1)(x + 1)^2$. Так как степень многочлена $Q_1(x)$ равна 3, то $P_1(x)$ — квадратный трехчлен, записанный в общем виде: $P_1(x) = ax^2 + bx + c$.

Аналогично, поскольку степень $Q_2(x)$ равна 2, то $P_2(x)$ — многочлен первой степени: $P_2(x) = dx + e$. Следовательно, имеем пять неопределенных коэффициентов a, b, c, d, e. Формула Остроградского примет вид

$$\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)^3} = \frac{ax^2+bx+c}{(x-1)(x+1)^2} + \int \frac{\delta x + e}{(x-1)(x+1)}dx.$$

Продифференцировав последнее равенство по x, получим

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+1)^3} = \left(\frac{ax^2+bx+c}{(x-1)(x+1)^2}\right)' + \frac{dx+e}{(x-1)(x+1)} =$$

$$= \frac{(2ax+b)(x-1)(x+1)^2 - (ax^2+bx+c)[(x+1)^2+2(x-1)(x+1)]^2}{(x-1)^2(x+1)^4} +$$

$$+ \frac{dx+e}{(x-1)(x+1)}.$$

Сократив первую из дробей в правой части на $(x+1)$ и приведя все дроби к общему знаменателю, получим

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+1)^3} =$$

$$= \frac{(2ax+b)(x-1)(x+1) - (ax^2+bx+c)(3x-1) + (dx+e)(x-1)(x+1)^2}{(x-1)^2(x+1)^3}.$$

Итак, при всех $x \neq \pm 1$ должно выполняться данное тождество. Так как знаменатели дробей слева и справа равны, то должны быть тождественно равны многочлены, находящиеся в числителях:

$$x \equiv (2ax+b)(x^2-1) - (ax^2+bx+c)(3x-1) +$$
$$+ (dx+e)(x^2-1)(x+1).$$

Найдем коэффициенты a, b, c, d, e методом неопределенных коэффициентов (сняв временно ограничения $x \neq \pm 1$). Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа:

x^4: $0 = d$;

x^3: $0 = -a + d + e$;

x^2: $0 = -2b + a + e - d$;

x^1: $1 = -2a - 3c + b - e - d$;

x^0: $0 = -b + c - e$.

Решая систему пяти уравнений с пятью неизвестными, находим $a = -\frac{1}{8}$, $b = -\frac{1}{8}$, $c = -\frac{1}{4}$, $d = 0$, $e = -\frac{1}{8}$.

Подставим значения коэффициентов в формулу Остроградского:

$$\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)^3} = -\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2} - \frac{1}{8}\int \frac{1}{(x-1)(x+1)}dx.$$

Осталось вычислить интеграл:

$$\int \frac{dx}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2}\int \frac{(1+x)-(x-1)}{(x-1)(x+1)}dx = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \ln|x+1| + C.$$

Итак, окончательно имеем

$$\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)^3} = -\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2} - \frac{1}{16}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C \; (x \neq \pm 1).$$

Пример 3.32. Найти $\int \frac{dx}{(x^3+1)^2}$.

Решение. Согласно формуле Остроградского

$$\int \frac{dx}{(x^3+1)^2} = \frac{Ax^2+Bx+C}{x^3+1} + D\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{Ex+F}{x^2-x+1}dx.$$

Дифференцируя и приводя к общему знаменателю, получаем тождество

$$1 \equiv -Ax^4 - 2Bx^3 - 3Cx^2 + 2Ax + B +$$
$$+ D(x^5 - x^4 + x^3 + x^2 - x + 1) + (Ex+F)(x^4 + x^3 + x + 1),$$

откуда имеем:

x^5: $0 = D + E$;

x^4: $0 = -A - D + E + F$;

x^3: $0 = -2B + D + F$;

x^2: $0 = -3C + D + E$;

x^1: $0 = 2A - D + E + F$;

x^0: $1 = B + D + E$.

Решая систему, находим $A = C = 0$, $B = \frac{1}{3}$, $D = -E = \frac{2}{9}$, $F = \frac{4}{9}$.

Итак,

$$\int\frac{dx}{(x^3+1)^2}=\frac{x}{3(x^3+1)}+\frac{2}{9}\ln|x+1|-\frac{2}{9}\int\frac{x-2}{x^2-x+1}dx=$$

$$=\frac{x}{3(x^3+1)}+\frac{1}{9}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C\ \ (x\neq-1).$$

Пример 3.33. Найти $\int\frac{dx}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}$.

Решение. Поскольку $x^4+2x^3+3x^2+2x+1=(x^2+x+1)^2$, то разложение согласно формуле Остроградского ищем в виде

$$\int\frac{dx}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}=\frac{Ax+B}{x^2+x+1}+\int\frac{Cx+D}{x^2+x+1}dx,$$

откуда, дифференцируя равенство и приводя дроби к общему знаменателю, получаем тождество

$$1\equiv A(x^2+x+1)-(Ax+B)(2x+1)+(x^2+x+1)(Cx+D).$$

Имеем:

x^3: $0=C$;

x^2: $0=-A+D+C$;

x^1: $0=D-2B+C$;

x^0: $1=A-B+D$,

откуда $A=D=\frac{2}{3}$, $B=\frac{1}{3}$, $C=0$. Подставляя в формулу Остроградского, окончательно получаем

$$\int\frac{dx}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}=\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x^2+x+1}=$$

$$=\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти неопределенные интегралы.

3.1. $\int\frac{1-2x}{4x-3}dx$. **3.2.** $\int\frac{2x+3}{3x+2}dx$. **3.3.** $\int\frac{dx}{3x^2+4x+1}$.

3.4. $\int\frac{dx}{15-2x-x^2}$. **3.5.** $\int\frac{dx}{(x+2)(x+3)}$. **3.6.** $\int\frac{(x+3)dx}{(x+2)(x-1)}$.

3.7. $\int \frac{2x dx}{x^2 + 3x - 4}$. **3.8.** $\int \frac{x + 1}{5x^2 + 2x + 1} dx$. **3.9.** $\int \frac{5x + 3}{x^2 + 10x + 29} dx$.

3.10. $\int (x - 1)^{10} dx$. **3.11.** $\int \frac{dx}{(1 - 3x)^{30}}$. **3.12.** $\int \frac{x^3 dx}{(x - 1)^{100}}$.

3.13. $\int (2x + 3)^2 (1 - x)^8 dx$. **3.14.** $\int \frac{x^2 + 1}{x + 1} dx$. **3.15.** $\int \frac{dx}{x^2 (1 + x^2)^2}$.

3.16. $\int \frac{x^2 + 1}{(x - 1)^3 (x + 3)} dx$. **3.17.** $\int \frac{x^2 dx}{(x + 2)^2 (x + 1)}$. **3.18.** $\int \frac{dx}{x^5 - x^2}$.

3.19. $\int \frac{x dx}{x^8 - 1}$. **3.20.** $\int \frac{x^3 - 2x}{(x^2 + 1)^2} dx$. **3.21.** $\int \frac{x^2 dx}{(x^2 + 2x + 2)^2}$.

3.22. $\int \frac{3x + 2}{(x^2 + 2x + 10)^2} dx$. **3.23.** $\int \frac{2x + 3}{(x^2 + 2x + 5)^2} dx$.

3.24. $\int \frac{dx}{(x^2 + 2)^3}$. **3.25.** $\int \frac{dx}{(x^4 + 1)^2}$. **3.26.** $\int \frac{x^2 + 1}{x^6 + 1} dx$.

3.27. $\int \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} dx$. **3.28.** $\int \frac{1 - x^7}{x(1 + x^7)} dx$. **3.29.** $\int \frac{x^2 + 2}{x^3 + x^2 - 2x} dx$.

3.30. $\int \frac{x^2 - x + 2}{x^4 - 5x^2 + 4} dx$. **3.31.** $\int \frac{x^2 + 2x + 6}{(x - 1)(x - 2)(x - 4)} dx$.

3.32. $\int \frac{4x^2 + 4x - 11}{(2x - 1)(2x + 3)(2x - 5)} dx$.

3.33. $\int \frac{x + 4}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6} dx$. **3.34.** $\int \frac{x^3 + 4x^2 + 6}{(x + 1)^2 (x^2 + 2)} dx$.

3.35. $\int \frac{3x + 1}{x(1 + x^2)^2} dx$. **3.36.** $\int \frac{x^5 + 1}{x^4 - 8x^2 + 16} dx$.

Глава 4
ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Основной подход при интегрировании функций, содержащих переменную под знаком радикала, состоит в подборе *рационализирующих подстановок*, т. е. таких подстановок, которые приводят подынтегральное выражение к рациональному виду. Назовем этот подход методом рационализации подынтегрального выражения. Рассмотрим некоторые из наиболее известных классов интегралов от иррациональных функций.

4.1. Интегрирование линейных и дробно-линейных иррациональностей

4.1.1. Интегралы вида

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})dx, \int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$$

Здесь под $R(x, y)$ понимается рациональная функция двух аргументов, т. е. отношение двух алгебраических многочленов соответственно степеней n, m: $R(x, y) = \dfrac{P_n(x, y)}{Q_m(x, y)}$. При этом многочленом степени n с двумя переменными x и y называется выражение вида

$$P_n(x, y) = a_{n0}x^n + a_{0n}y^n + a_{(n-1)1}x^{n-1}y + a_{1(n-1)}xy^{n-1} +$$
$$+ \ldots + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{10}x + a_{01}y + a_{00} = \sum_{0 \leqslant i+j \leqslant n} a_{ij}x^i y^j,$$

$i, j = 0, 1, 2, \ldots, n$, где суммарная степень $i + j$ каждого одночлена неотрицательна и не превышает n, причем среди коэффициентов a_{n0}, $a_{(n-1)1}$, $a_{(n-2)2}$, a_{n0} есть хотя бы один, отличный от нуля.

Дробно-линейной иррациональностью назовем функцию вида $R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$, где $n \in \mathbb{N}$, a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ — постоянные, $ad - bc \neq 0$, $c \neq 0$. В случае $c = 0$, $a \neq 0$ получим, в частности, *линейную иррациональность* $R(x, \sqrt[n]{Ax+B})$, где $A = \frac{a}{d}$, $B = \frac{b}{d}$.

1. Рационализация *линейных иррациональностей* вида $R(x, \sqrt[n]{ax+b})$, где a и b — постоянные ($a \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$), осуществляется с помощью подстановки $t = \sqrt[n]{ax+b}$. Возводя обе части этого равенства в степень n, получим $t^n = ax + b$, откуда $x = \frac{t^n - b}{a}$, $dx = \frac{n}{a}t^{n-1}dt$. Переходя в выражении R от переменной x к переменной t, получим рациональное выражение $R\left(\frac{t^n - b}{a}, t\right)$.

2. Аналогичным образом рационализируются выражения $R(x^m, \sqrt[n]{ax^m + b})$, где $m, n \in \mathbb{N}$, $m > 1$, $n > 1$. При этом используется подстановка $t = \sqrt[n]{ax^m + b}$.

3. Рационализация *дробно-линейных иррациональностей* осуществляется с помощью подстановки $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$. Тогда $t^n = \frac{ax + b}{cx + d}$, $x = \frac{dt^n - b}{a - ct^n}$, $dx = \frac{(ad - bc)nt^{n-1}}{(a - ct^n)^2}dt$ и для интеграла получаем

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx = \int R\left(\frac{dt^n - b}{a - ct^n}, t\right)\frac{(ar - bc)nt^{n-1}}{(a - ct^n)^2}dt.$$

Пример 4.1. Найти $\int \frac{\sqrt{x+9}}{x}dx$.

Решение. Под знаком интеграла имеется линейная иррациональность $\sqrt{ax+b} = \sqrt{x+9}$, поэтому положим $t = \sqrt{x+9}$, тогда $x = t^2 - 9$, $dx = 2tdt$ и имеем

$$\int \frac{\sqrt{x+9}}{x}dx = 2\int \frac{t^2dt}{t^2-9} = 2\int \frac{(t^2-9)+9dt}{t^2-9} = 2\int dt + 18\int \frac{dt}{t^2-9} =$$
$$= 2t + 3\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right| + C = 2\sqrt{x+9} + +3\ln\left|\frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+9}+3}\right| + C,$$

где $x \geqslant -9$, $x \neq 0$.

Пример 4.2. Найти $\int \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} \cdot \frac{dx}{(2-x)^2}$.

Решение. Под знаком интеграла видим дробно-линейную иррациональность $\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}$; согласно рекомендации применим рационализирующую подстановку $t = \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}$, тогда $x = \frac{2(1-t^3)}{1+t^3}$, $2 - x = \frac{4t^3}{1+t^3}$, $dx = \frac{-12t^2}{(1+t^3)^2}dt$. Подставляя в интеграл, получим

$$\int \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} \cdot \frac{dx}{(2-x)^2} = -\frac{3}{4} \cdot \int \frac{dt}{t^3} = \frac{3}{8t^2} + C = \frac{3}{8} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2} + C$$

$(x \neq \pm 2)$.

4.1.2. Интегралы вида

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_k}{q_k}}\right)dx$$

Интегралы указанного вида, где R — рациональная функция своих аргументов, показатели степеней $\frac{p_i}{q_i}$ $(p_i \in \mathbb{Z}, q_i \in \mathbb{N})$, $i = 1, 2, \ldots, k$, — несократимые дроби, находятся с помощью рационализирующей подстановки $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, где $n = \text{НОК}(q_1, q_2 \ldots, q_k)$. Тогда найдутся такие натуральные числа $l_1, l_2, \ldots, l_k$, что

$$\begin{cases} q_1 \cdot l_1 = n, \\ q_2 \cdot l_2 = n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_k \cdot l_k = n. \end{cases}$$

Выражаем $x = -\frac{t^n d - b}{t^n c - a}$, $dx = \frac{nt^{n-1}(ad - bc)}{(ct^n - a)^2}dt$ и в результате приходим к следующему интегралу от рациональной функции:

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_k}{q_k}}\right)dx =$$

$$= \int R\left(-\frac{t^n d - b}{t^n c - a}, t^{p_1 l_1}, t^{p_2 l_2}, \ldots, t^{p_k l_k}\right)\frac{nt^{n-1}(ad - bc)}{(ct^n - a)^2}dt.$$

Пример 4.3. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$.

Решение. Интеграл является интегралом рассматриваемого типа, где $a = d = 1$, $b = c = 0$, $\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{2}$, $\frac{p_2}{q_2} = \frac{1}{3}$. Общий знаменатель этих дробей равен 6, поэтому применяем подстановку $t = \sqrt[6]{x}$, в результате освобождаясь от обоих радикалов. С помощью этой рационализирующей подстановки интеграл от иррациональной функции оказывается сведенным к интегралу от рациональной функции. Имеем $x = t^6$, $dx = 6t^5 dt$, $\sqrt{x} = t^3$, $\sqrt[3]{x} = t^2$ и тогда

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} = 6\int \frac{t^2 dt}{1+t^2} = 6\int \frac{(t^2+1)-1}{1+t^2} = 6\left(\int dt - \int \frac{dt}{1+t^2}\right) =$$

$$= 6(t - \operatorname{arctg} t) + C = 6(\sqrt[6]{x} - \operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}) + C \quad (x > 0).$$

Пример 4.4. $\int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx$.

Решение. Этот интеграл также относится к интегралам указанного вида, причем $a = d = 1$, $b = c = 0$, $\frac{p_1}{q_1} = \frac{2}{3}$, $\frac{p_2}{q_2} = \frac{1}{6}$, $\frac{p_3}{q_3} = \frac{1}{3}$. Общий знаменатель всех дробей равен 6, поэтому аналогично предыдущему примеру применяем подстановку $t = \sqrt[6]{x}$. Тогда $x = t^6$, $dx = 6t^5 dt$, $\sqrt[3]{x} = t^2$, $\sqrt[3]{x^2} = t^4$. Следовательно,

$$\int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx = 6 \cdot \int \frac{t^5 + t^3 + 1}{1+t^2}dt = 6 \cdot \int \frac{t^3(t^2+1)+1}{1+t^2}dt =$$

$$= 6\int t^3 dt + 6\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{3}{2}t^4 + 6\operatorname{arctg}(t) + C =$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{x^2} + 6\cdot\operatorname{arctg}(\sqrt[6]{x}) + C \quad (x > 0).$$

4.2. Интегрирование квадратичных иррациональностей

Рассмотрим основные приемы вычисления интегралов от квадратичных иррациональностей, т. е. интегралов вида

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx,$$

где R — рациональная функция своих аргументов, a, b, c — некоторые постоянные, $a \neq 0$. При этом будем дополнительно считать, что квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ не имеет кратного корня, т. е. не представим в виде $a(x_1 - x_2)^2$, иначе корень из этого выражения является рациональным. Обратимся вначале к некоторым важным частным случаям.

4.2.1. Интегралы вида $\int \sqrt{ax^2+bx+c}dx$

Интегралы указанного вида выделением полного квадрата под знаком радикала приводятся к одному из двух типов интегралов: $\int\sqrt{A^2-t^2}dt$ или $\int\sqrt{t^2+A}dt$.

Действительно, выделив полный квадрат, получим

$$\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx = \int\sqrt{a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c}\,dx =$$

$$= \int\sqrt{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c}\,dx.$$

Далее, если $a > 0$, то подстановкой $t = x + \dfrac{b}{2a}$ интеграл приводится к виду $\int\sqrt{t^2+A}dt$ (с точностью до коэффициента); если же $a < 0$ и $c - \dfrac{b^2}{4a} > 0$, аналогичной подстановкой получаем интеграл вида $\int\sqrt{A^2-t^2}dt$. Вычислим эти интегралы.

1. $\int\sqrt{A^2-t^2}\,dt$. Положим $u=\sqrt{A^2-t^2}$, $dv=dt$, откуда $du=-\dfrac{tdt}{\sqrt{A^2-t^2}}$, $v=t$. Интегрируя по частям, получаем

$$\int\sqrt{A^2-t^2}\,dt=t\sqrt{A^2-t^2}-\int\frac{-t^2dt}{\sqrt{A^2-t^2}}=t\sqrt{A^2-t^2}-\int\frac{A^2-t^2-A^2}{\sqrt{A^2-t^2}}dt=$$

$$=t\sqrt{A^2-t^2}-\int\sqrt{A^2-t^2}\,dt+A^2\arcsin\frac{t}{A}.$$

Выражая из полученного равенства искомый интеграл, находим окончательно

$$\int\sqrt{A^2-t^2}\,dt=\frac{t}{2}\sqrt{A^2-t^2}+\frac{A^2}{2}\arcsin\frac{t}{A}+C\ \ (|t|\leqslant A).$$

2. $\int\sqrt{t^2+A}\,dt$. Положим $u=\sqrt{t^2+A}$, $dv=dt$. Интегрируя по частям, получаем

$$I=\int\sqrt{t^2+A}\,dt=t\sqrt{t^2+A}-\int\frac{t^2dt}{\sqrt{t^2+A}}=t\sqrt{t^2+A}-\int\frac{t^2+A-A}{\sqrt{t^2+A}}dt=$$

$$=t\sqrt{t^2+A}+A\ln\left|t+\sqrt{t^2+A}\right|+I.$$

Отсюда находим окончательно, выражая I:

$$\int\sqrt{t^2+A}\,dt=\frac{t}{2}\sqrt{t^2+A}+\frac{A}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+A}\right|+C\ \ (t^2+A\geqslant 0).$$

Другие способы вычисления интегралов $\int\sqrt{A^2-t^2}\,dt$ и $\int\sqrt{t^2+A}\,dt$ рассматриваются в подпараграфах 4.2.11—4.2.13.

Замечание. Если в квадратном трехчлене ax^2+bx+c выделить полный квадрат $a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\dfrac{b^2}{4a}\right)$ и положить $t=\sqrt{\left|\dfrac{a}{c-b^2/(4a)}\right|}\cdot\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)$, то интеграл $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ приводится к одному из следующих трех видов:

$$\int R_1(t,\sqrt{1-t^2})dt,\int R_2(t,\sqrt{t^2-1})dt,\int R_3(t,\sqrt{1+t^2})dt.$$

Пример 4.5. Найти $\int\sqrt{x^2+8x+25}\,dx$.

Решение. Имеем

$$\int\sqrt{x^2+8x+25}dx=\int\sqrt{(x^2+8x+16)+9}dx=$$
$$=\int\sqrt{(x+4)^2+9}dx=\int\sqrt{(x+4)^2+9}d(x+4)=$$
$$=\frac{x+4}{2}\sqrt{x^2+8x+25}+\frac{9}{2}\ln\left|x+4+\sqrt{x^2+8x+25}\right|+C.$$

Пример 4.6. Найти $\int\sqrt{-x^2+2x+8}\,dx$.

Решение. Имеем

$$\int\sqrt{-x^2+2x+8}dx=\int\sqrt{-(x^2-2x)+8}dx=\int\sqrt{-((x-1)^2-1)+8}dx=$$
$$=\int\sqrt{9-(x-1)^2}\,dx=\frac{x-1}{2}\sqrt{-x^2+2x+8}+\frac{9}{2}\arcsin\frac{x-1}{3}+C$$

($x\in[-2;4]$).

4.2.2. Интегралы вида $\int(Ax+B)\sqrt{ax^2+bx+c}dx$

Интегралы данного вида вычисляются выделением в выражении $Ax+B$ производной $2ax+b$ от подкоренного выражения с последующим разбиением в сумму двух табличных интегралов:

$$\int(Ax+B)\sqrt{ax^2+bx+c}dx=$$
$$=\int\left[\frac{A}{2a}(2ax+b)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\right]\sqrt{ax^2+bx+c}dx=$$
$$=\frac{A}{2a}\int\sqrt{ax^2+bx+c}d(ax^2+bx+c)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int\sqrt{ax^2+bx+c}dx=$$
$$=\frac{A}{3a}\sqrt{(ax^2+bx+c)^3}+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\cdot I,$$

где интеграл I после выделения под корнем полного квадрата и замены $t=x+\dfrac{b}{2a}$ сводится к одному из следующих интегралов (см. подпараграф 4.2.1):

$$\int\sqrt{t^2+k}dt=\frac{t}{2}\sqrt{t^2+k}+\frac{k}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+k}\right|+C$$

или

$$\int\sqrt{k^2-t^2}dt=\frac{t}{2}\sqrt{k^2-t^2}+\frac{k^2}{2}\arcsin\frac{t}{k}+C.$$

Пример 4.7. Найти $\int (2x+7)\sqrt{x^2+x+1}dx$.

Решение. Имеем

$$\int [(2x+1)+6]\sqrt{x^2+x+1}dx =$$

$$= \int (2x+1)\sqrt{x^2+x+1}dx + 6\int \sqrt{x^2+x+1}dx =$$

$$= \int \sqrt{x^2+x+1}d(x^2+x+1) + 6\int \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx = \frac{2}{3}\sqrt{(x^2+x+1)^3} +$$

$$+ 6\left[\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)\sqrt{x^2+x+1} + \frac{3}{8}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|\right] + C =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{(x^2+x+1)^3} + 3\left(x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2+x+1} +$$

$$+ \frac{9}{4}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right| + C.$$

4.2.3. Интегралы вида $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Интегралы указанного вида путем выделения полного квадрата из квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ под знаком радикала приводятся к табличным интегралам $\int \frac{dx}{\sqrt{A^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{A} + C$ или $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+A}\right| + C$.

Пример 4.8. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{-3x^2+4x-1}}$.

Решение. Выделяя полный квадрат по переменной x, преобразуем интеграл следующим образом:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d(x-2/3)}{\sqrt{1/9-(x-2/3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x-2/3}{1/3} + C = \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin(3x-2) + C$$

$\left(x \in \left(\frac{1}{3};\ 1\right)\right)$.

Пример 4.9. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$.

Решение. Выделяя полный квадрат по переменной x, преобразуем квадратный трехчлен к виду $(x + 1)^2 + 4$. В результате приходим к интегралу

$$\int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+4}} = \ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right| + C.$$

4.2.4. Интегралы вида $\int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Интегралы указанного вида чаще всего вычисляются выделением в числителе дроби производной от подкоренного выражения:

$$\int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+B-\frac{Ab}{2a}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx =$$

$$\frac{A}{2a}\int \frac{d(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Пример 4.10. Найти $\int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx$.

Решение. Выделим в числителе производную подкоренного выражения:

$$\int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx = \int \frac{\frac{5}{4}(4x+8)-13}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx =$$

$$= \frac{5}{4}\int \frac{4x+8}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx - 13\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+8x+1}} =$$

$$= \frac{5}{2}\sqrt{2x^2+8x+1} - \frac{13}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+1/2}} =$$

$$= \frac{5}{2}\sqrt{2x^2+8x+1} - \frac{13}{\sqrt{2}}\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+\frac{1}{2}}\right| + C$$

где $x \notin \left[-2-\frac{\sqrt{14}}{2}; -2+\frac{\sqrt{14}}{2}\right]$.

Пример 4.11. Найти $\int \frac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x-8}}dx$.

Решение. Выделим в числителе производную подкоренного выражения:

$$\int \frac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x-8}}dx = \int \frac{-3/2\cdot(-2x+6)+13}{\sqrt{-x^2+6x-8}}dx =$$
$$= -\frac{3}{2}\int \frac{-2x+6}{\sqrt{-x^2+6x-8}}dx + 13\int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-3)^2}} =$$
$$= -3\sqrt{-x^2+6x-8} + 13\arcsin(x-3) + C$$

$(x \in (2;\,4))$.

4.2.5. Интегралы вида $\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Интегралы данного вида, где $P_n(x)$ — алгебраический многочлен n-й степени, находятся с помощью тождества

$$\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad (4.1)$$

где $Q_{n-1}(x)$ — многочлен $(n-1)$-й степени с неопределенными коэффициентами, λ — еще один неопределенный коэффициент. Дифференцируя это тождество и умножая на $\sqrt{ax^2+bx+c}$, получим равенство двух многочленов:

$$P_n(x) = Q'_{n-1}(x)(ax^2+bx+c) + \frac{1}{2}Q_{n-1}(x)(2ax+b) + \lambda,$$

из которого методом неопределенных коэффициентов можно определить коэффициенты многочлена $Q_{n-1}(x)$ и число λ.

Пример 4.12. Найти $\int \frac{(x^3-2)dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

Решение. Воспользуемся формулой (4.1):

$$\int \frac{(x^3-2)dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = (ax^2+bx+c)\sqrt{x^2+x+1} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Дифференцируя это тождество, имеем

$$\frac{x^3-2}{\sqrt{x^2+x+1}} = (2ax+b)\sqrt{x^2+x+1} + \frac{(ax^2+bx+c)(2x+1)}{2\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+x+1}},$$

откуда, умножая на $2\sqrt{x^2+x+1}$, получим

$$2(x^3-2) = (4ax+2b)(x^2+x+1) + \\ + (ax^2+bx+c)(2x+1)+2\lambda.$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов a, b, c и λ имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 2=4a+2a, \\ 0=4a+2b+a+2b, \\ 0=4a+2b+b+2c, \\ -4=2b+c+2\lambda, \end{cases}$$

откуда определяем $a = \dfrac{1}{3}$, $b = -\dfrac{5}{12}$, $c = -\dfrac{1}{24}$, $\lambda = -\dfrac{25}{16}$. Следовательно,

$$\int\frac{(x^3-2)dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \left(\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{12}x-\frac{1}{24}\right)\sqrt{x^2+x+1}-\frac{25}{16}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}} =$$

$$=\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{12}x-\frac{1}{24}\right)\sqrt{x^2+x+1}-\frac{25}{16}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|+C.$$

4.2.6. Интегралы вида $\int\frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$ $(n\in\mathbb{N})$

Интегралы вида $\int\frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ $(n = 1)$ берутся с помощью подстановки $t = \dfrac{1}{x-\alpha}$. В результате они приводятся к интегралам типа $\int\frac{dt}{\sqrt{At^2+Bt+C}}$.

Интегралы вида $\int\frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$ также вычисляются с помощью замены $t = \dfrac{1}{x-\alpha}$. Тогда $x = \dfrac{1}{t}+\alpha$, $dx = -\dfrac{dt}{t^2}$,

$ax^2+bx+c=\dfrac{(a\alpha^2+b\alpha+c)t^2+(2a\alpha+b)t+a}{t^2}$ и получаем, что

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n \sqrt{ax^2+bx+c}} = -\int \frac{t^{n-1}dt}{\sqrt{(a\alpha^2+b\alpha+c)t^2+(2a\alpha+b)t+a}}$$

(т. е. интеграл сводится к интегралу, рассмотренному в подпараграфе 4.2.5).

Пример 4.13. Найти $\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}}$.

Решение. Положим $t = \frac{1}{x}$, тогда $x = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{dt}{t^2}$ и, подставляя в интеграл, получим (при $t > 0$ см. замечание в подпараграфе 4.2.13):

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}} = -\int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{5}{t^2}-\frac{2}{t}+1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-2t+5}} =$$

$$= -\ln\left|t-1+\sqrt{t^2-2t+5}\right|+C$$

$$= -\ln\left|\frac{1}{x}-1+\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+5}\right|+C = -\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{5x^2-2x+1}}{x}\right|+C$$

($x > 0$).

Пример 4.14. Найти $\int \frac{(3x+2)dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}$.

Решение. Разобьем интеграл на сумму двух интегралов:

$$\int \frac{(3x+2)dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}} = \int \frac{3(x+1)-1}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}dx =$$

$$= 3\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+3}} - \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}} = 3I_1 + I_2.$$

Вычислим каждый из интегралов I_1 и I_2.

$$I_1 = \ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+3}\right|+C_1.$$

В интеграле I_2 положим $t = \frac{1}{x+1}$ ($t > 0$):

$$I_2=\int\frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{1}{t}-1\right)^2+3\left(\frac{1}{t}-1\right)+3}}=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}}=\ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+1}\right|+C_2.$$

Окончательно имеем

$$\int\frac{(3x+2)dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}=$$

$$=3\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+3}\right|+\ln\left|\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{x^2+3x+3}}{x+1}\right|+C$$

$(x + 1 > 0)$.

Пример 4.15. Найти $\int\frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2+3x+1}}$.

Решение. Положим $t = \frac{1}{x-1}$, тогда $x = 1 + \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{1}{t^2}dt$ и в результате перехода к новой переменной приходим при $t > 0$ к интегралу $I=-\int\frac{t^2dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}}$. Далее воспользуемся формулой (4.1):

$$\int\frac{t^2dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}}=(At+B)\sqrt{5t^2+5t+1}+\lambda\int\frac{dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}}.$$

Дифференцируя это тождество, получаем

$$\frac{t^2}{\sqrt{5t^2+5t+1}}=A\sqrt{5t^2+5t+1}+\frac{(At+B)(10t+5)}{2\sqrt{5t^2+5t+1}}+\frac{\lambda}{\sqrt{5t^2+5t+1}}.$$

Умножим полученное тождество на $2\cdot\sqrt{5t^2+5t+1}$:

$$2t^2 = t^2(20A) + t(15A + 10B) + (2A + 5B + 2\lambda).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получаем систему

$$\begin{cases}2 = 20A,\\ 0,\ 15A + 10B,\\ 0 = 2A + 5B + 2\lambda,\end{cases}$$

откуда находим $A = \frac{1}{10}$, $B = -\frac{3}{20}$, $\lambda = \frac{11}{40}$.

Далее,

$$\int\frac{dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\int\frac{d(t+1/2)}{\sqrt{(t+1/2)^2-1/20}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+\frac{1}{5}}\right|+C.$$

Окончательно имеем

$$I=-\left(\frac{1}{10}t-\frac{3}{10}\right)\sqrt{5t^2+5t+1}-\frac{11}{40\sqrt{5}}\ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+\frac{1}{5}}\right|+C,$$

где $t=\dfrac{1}{x-1}$, или

$$I=\frac{3x-5}{20(x-1)^2}\sqrt{x^2+3x+1}-\frac{11}{40\sqrt{5}}\ln\left|\frac{(x+1)\sqrt{5}+2\sqrt{x^2+3x+1}}{x-1}\right|+C$$

$(x>1)$.

4.2.7. Интегралы вида $\int\frac{dx}{(x^2+a)^n\cdot\sqrt{bx^2+c}}$ $(n\in\mathbb{Z})$

Интегралы этого типа при $bc\neq 0$ вычисляются подстановкой $t=(\sqrt{bx^2+c})'=\dfrac{bx}{\sqrt{bx^2+c}}$. Тогда $x^2=\dfrac{ct^2}{b(b-t^2)}$, $xdx=\dfrac{ctdt}{(t^2-b)^2}$ и, умножая и деля подынтегральную дробь на bx^2, получим

$$\int\frac{dx}{(x^2+a)^n\cdot\sqrt{bx^2+c}}=\frac{1}{b}\int\frac{1}{x^2(x^2+a)^n}\left(\frac{bx}{\sqrt{bx^2+c}}\right)xdx=$$
$$=\frac{1}{b}\int\frac{1}{\left(\dfrac{ct^2}{b(b-t^2)}\right)\left(\dfrac{ct^2}{b(b-t^2)}+a\right)^n}\cdot t\cdot\frac{ctdt}{(t^2-b)^2}.$$

Пример 4.16. Найти $\int\frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}$.

Решение. Положим $t=(\sqrt{x^2+2})'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$, тогда $x^2=\dfrac{2t^2}{1-t^2}$, $x^2+1=\dfrac{t^2+1}{1-t^2}$, $xdx=\dfrac{2tdt}{(1-t^2)^2}$. Для удобства преобразований умножим и разделим подынтегральное выражение на x^2:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} = \int \frac{x \cdot xdx}{\sqrt{x^2+2} \cdot x^2 \cdot (x^2+1)} = \int \frac{t \cdot \dfrac{2tdt}{(1-t^2)^2}}{\dfrac{2t^2}{1-t^2} \cdot \dfrac{t^2+1}{1-t^2}} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} + C.$$

4.2.8. Интегралы вида $\int \frac{xdx}{(x^2+a)^n \cdot \sqrt{bx^2+c}}$ $(n \in \mathbb{Z})$

Интегралы данного вида при $bc \neq 0$ рационализируются подстановкой $t = \sqrt{bx^2+c}$. Тогда $x^2 = \dfrac{t^2-c}{b}$, $xdx = \dfrac{tdt}{b}$ и интеграл преобразуется к виду

$$\int \frac{xdx}{(x^2+a)^n \cdot \sqrt{bx^2+c}} = \frac{1}{b} \int \frac{tdt}{\left(\dfrac{t^2-c}{b}+a\right)^n \cdot t}.$$

Пример 4.17. Найти $\int \frac{xdx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}$.

Решение. Положим $t = \sqrt{x^2+2}$, тогда $x^2 = t^2 - 2$, $xdx = tdt$ и приходим к интегралу

$$\int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2}-1}{\sqrt{x^2+2}+1}\right| + C.$$

4.2.9. Интегралы вида $\int \frac{(Ax+B)dx}{(x^2+px+q)^n \sqrt{ax^2+bx+c}}$ $(n \in \mathbb{N})$

Здесь считается, что $p^2 - 4q < 0$, т. е. квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ не имеет действительных корней.

Предположим вначале, что $ax^2 + bx + c = a(x^2 + px + q)$. Тогда

$$\int \frac{(Ax+B)dx}{(x^2+px+q)^n \sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{(A_1 x + B_1)dx}{(x^2+px+q)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Поскольку $A_1x + B_1 = \frac{A_1}{2}(2x + p) + B_1 - \frac{A_1p}{2}$, то

$$\int \frac{(A_1x+B_1)dx}{(x^2+px+q)^{n+\frac{1}{2}}} = C_1 \cdot \int \frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^{n+\frac{1}{2}}} + D_1 \cdot \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Первый из полученных интегралов табличный. Для вычисления интеграла

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{n+\frac{1}{2}}} \tag{4.2}$$

применяется подстановка Абеля: $t = (\sqrt{x^2+px+q})'$.

В общем случае, когда отношение трехчленов $ax^2 + bx + c$ и $x^2 + px + q$ непостоянно, в интеграле $\int \frac{(Ax+B)dx}{(x^2+px+q)^n \sqrt{ax^2+bx+c}}$ делают замену переменной интегрирования так, чтобы во вновь полученных трехчленах одновременно исчезли члены с первой степенью. Это достигается, например, с помощью дробно-линейной подстановки $x = \frac{\alpha t + \beta}{t + 1}$, если $p \neq \frac{b}{a}$, и $x = t - \frac{p}{2}$, если $p = \frac{b}{a}$.

В результате получаем интеграл

$$\int \frac{Mt+N}{(t^2+\lambda)^n \sqrt{\delta t^2+r}} dt, \tag{4.3}$$

для вычисления которого представим его в виде суммы

$$\int \frac{Mtdt}{(t^2+\lambda)^n \sqrt{\delta t^2+r}} + N \int \frac{dt}{(t^2+\lambda)^n \sqrt{\delta t^2+r}}.$$

К первому из этих интегралов применяем подстановку $u = \sqrt{\delta t^2 + r}$, а ко второму — подстановку $v = (\sqrt{\delta t_2 + r})'$ (см. подпараграфы 4.2.7, 4.2.8).

Пример 4.18. Найти $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}}$.

Решение. 1-й способ. Выделяя полный квадрат, перепишем интеграл в виде

$$\int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}} = \int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}} =$$

$$= \int \frac{dx}{\frac{5\sqrt{5}}{8}\left[\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right)^2+\frac{3}{5}\right]\sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right)^2-1}}.$$

Положим $t=\frac{2x+1}{\sqrt{5}}$, тогда $\sqrt{5}dt=2dx$ и, значит, приходим к интегралу

$$\frac{4}{5}\int \frac{dt}{\left(t^2+\frac{3}{5}\right)\sqrt{t^2-1}}.$$

Положим теперь $t = \frac{1}{\sin u}$, откуда $\frac{1}{t} = \sin u$, $-\frac{dt}{t^2} = \cos u\, du$.

Поэтому

$$\frac{4}{5}\int \frac{dt}{\left(t^2+\frac{3}{5}\right)\sqrt{t^2-1}} = -\frac{4}{5}\int \frac{\cos u \sin u\, du}{\left(1+\frac{3}{5}\sin^2 u\right)\cos u} = -\frac{4}{5}\int \frac{\sin u\, du}{\frac{8}{5}-\frac{3}{5}\cos^2 u} =$$

$$= \frac{4}{3}\int \frac{d(\cos u)}{\frac{8}{3}-\cos^2 u} = \frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{8}+\sqrt{3}\cos u}{\sqrt{8}-\sqrt{3}\cos u}\right| + C,$$

где $u=\arcsin\frac{\sqrt{5}}{2x+1}$.

Окончательно получим при $x \notin \left[-\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}); \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\right]$

$$\int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{(2x+1)\sqrt{2}+\sqrt{3(x^2+x+1)}}{(2x+1)\sqrt{2}-\sqrt{3(x^2+x+1)}}\right| + C.$$

2-й способ. Вычислим этот же интеграл без применения тригонометрических подстановок. Полагая $y = x + \frac{1}{2}$, сразу приходим к интегралу (см. подпараграф 4.2.7) $\int \frac{dy}{\left(y^2+\frac{3}{4}\right)\sqrt{y^2-\frac{5}{4}}}$, который рационализируется подстановкой $t=\left(\sqrt{y^2-\frac{5}{4}}\right)'=\frac{y}{\sqrt{y^2-\frac{5}{4}}}$, откуда $\frac{dy}{\sqrt{y^2-\frac{5}{4}}}=\frac{dt}{1-t^2}$.

Подставляя в интеграл, имеем

$$\int\frac{dt}{\frac{3}{4}-2t^2}=\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\sqrt{8}t}{\sqrt{3}-\sqrt{8}t}\right|+C,$$

где $t=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x-1}}$.

Окончательно получаем при $x\notin\left[-\frac{1}{2}(1+\sqrt{5});\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\right]$

$$\int\frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}}=\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{(2x+1)\sqrt{2}+\sqrt{3(x^2+x-1)}}{(2x+1)\sqrt{2}-\sqrt{3(x^2+x-1)}}\right|+C.$$

Пример 4.19. Найти $\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+x+2)^5}}$.

Решение. Это интеграл вида (4.2), воспользуемся для его вычисления подстановкой Абеля, положив $t=(\sqrt{x^2+x+2})'=$ $=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}}$. Тогда

$$4t^2(x^2+x+2)=4x^2+4x+1=4(x^2+x+2)-7,$$

откуда $x^2+x+2=\frac{-7}{4t^2-4}$. Дифференцируя равенство $t\sqrt{x^2+x+2}=x+\frac{1}{2}$ с использованием в его левой части правила $d(uv)=vdu+udv$, имеем

$$d(t\sqrt{x^2+x+2})=d\left(x+\frac{1}{2}\right),\ \sqrt{x^2+x+2}\cdot dt+t\cdot\frac{(2x+1)dx}{2\sqrt{x^2+x+2}}=dx,$$

$$\sqrt{x^2+x+2}\cdot dt+t^2dx=dx,$$

откуда получаем требуемое соотношение, связывающее дифференциалы «старой» и «новой» переменных интегрирования:

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+2}}=\frac{dt}{1-t^2}.$$

Подставляя в интеграл, получим

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+x+2)^5}}=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+2}(x^2+x+2)^2}=$$

$$=\int\frac{(4t^2-4)^2}{49}\cdot\frac{dt}{1-t^2}=\frac{16}{49}\int(1-t^2)dt=\frac{16}{49}\left(t-\frac{t^3}{3}\right)+C=$$

$$=\frac{16}{49}\left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}}-\frac{1}{24}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+2}}\right)^3\right)+C.$$

Пример 4.20. Найти $\int\frac{(x+2)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}$.

Решение. Это интеграл вида (4.3). Разобьем его на два интеграла:

$$\int\frac{(x+2)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}=\int\frac{xdx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}+\int\frac{2dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}=I_1+I_2.$$

Положив в первом из интегралов $u = x^2$, а затем $z=\sqrt{u+2}$, получим

$$I_1=\frac{1}{2}\int\frac{du}{(u+1)\sqrt{u+2}}=\int\frac{dz}{(z^2-1)}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2}-1}{\sqrt{x^2+2}+1}\right|+C.$$

Для вычисления второго интеграла положим $t=(\sqrt{x^2+2})'=$ $=\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$. Тогда $x^2=\frac{2t^2}{1-t^2}$, $x^2+1=\frac{t^2+1}{1-t^2}$, $xdx=\frac{2tdt}{(1-t^2)^2}$ и, подставляя в интеграл, получим

$$I_2=\int\frac{2dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}=\int\frac{2x(xdx)}{x^2(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}=\int\frac{2t\cdot\frac{2tdt}{(1-t^2)^2}}{\frac{2t^2}{1-t^2}\cdot\frac{t^2+1}{1-t^2}}=$$

$$= \int \frac{2dt}{t^2+1} = 2\operatorname{arctg} t + C = 2\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{x^2+2}} + C.$$

Окончательно имеем

$$\int \frac{(x+2)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2}-1}{\sqrt{x^2+2}+1}\right| + 2\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{x^2+2}} + C.$$

Замечание. Интеграл $\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}$ на промежутке $x > 0$ ($x < 0$) заменой $u = \frac{1}{x^2}$ приводится к виду $\int \frac{-du}{(u+1)\sqrt{1+2u}}$.

Пример 4.21. Найти $\int \frac{11x-13}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+1}}dx$.

Решение. Так как отношение трехчленов $x^2 - x + 1$ и $x^2 + 1$ не является константой, то приведем этот интеграл к виду (4.3) дробно-линейной подстановкой $x = \frac{\alpha t + \beta}{t + 1}$. Найдем коэффициенты α и β. Имеем

$$x^2 - x + 1 = \frac{\alpha^2 t^2 + 2\alpha\beta t + \beta^2 - (\alpha t + \beta)(t+1) + t^2 + 2t + 1}{(t+1)^2}.$$

Приравнивая к нулю коэффициент при t в числителе этой дроби, получаем соотношением между α и β: $2\alpha\beta - \alpha - \beta + 2 = 0$.

Поскольку

$$x^2 + 1 = \frac{\alpha^2 t^2 + 2\alpha\beta t + \beta^2 + t^2 + 2t + 1}{(t+1)^2},$$

то, приравнивая к нулю коэффициент при t в числителе этой дроби, получаем еще одно соотношение между α и β: $2\alpha\beta + 2 = 0$.

Решая систему

$$\begin{cases} 2\alpha\beta - \alpha - \beta + 2 = 0, \\ 2\alpha\beta + 2 = 0, \end{cases}$$

находим $\begin{cases} \alpha = 1, \\ \beta = -1. \end{cases}$ Следовательно, в данном интеграле надо делать замену $x = \frac{t-1}{t+1}$. Тогда имеем $x^2 - x + 1 = \frac{t^2 + 3}{(t+1)^2}$, $x^2 + 1 =$

$= \dfrac{2t^2 + 2}{(t+1)^2}$, $11x - 13 = -\dfrac{2t + 24}{t+1}$, $dx = \dfrac{2dt}{(t+1)^2}$ и, подставляя в интеграл, получаем его в виде (4.3):

$$\int \frac{11x-13}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+1}}\,dx = -2\sqrt{2}\int \frac{(t+12)dt}{(t^2+3)\sqrt{t^2+1}}.$$

Далее имеем

$$\int \frac{tdt}{(t^2+3)\sqrt{t^2+1}} = \int \frac{d(\sqrt{t^2+1})}{t^2+3} = \int \frac{du}{u^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{2}} + C =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{2}} + C.$$

Для вычисления интеграла $\displaystyle\int \frac{dt}{(t^2+3)\sqrt{t^2+1}}$ сделаем подстановку $z = (\sqrt{t^2+1})'$. Имеем $\dfrac{dz}{1-z^2} = \dfrac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$, $t^2 + 3 = \dfrac{3-2z^2}{1-z^2}$ и тогда

$$\int \frac{dt}{(t^2+3)\sqrt{t^2+1}} = \int \frac{dz}{3-2z^2} = \frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+z\sqrt{2}}{\sqrt{3}-z\sqrt{2}}\right| + C =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3t^2+3}+\sqrt{2}t}{\sqrt{3t^2+3}-\sqrt{2}t}\right| + C.$$

Окончательно имеем

$$\int \frac{11x-13}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+1}}\,dx = -2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{2}} - 4\sqrt{3}\cdot\ln\left|\frac{\sqrt{3t^2+3}+\sqrt{2}t}{\sqrt{3t^2+3}-\sqrt{2}t}\right| + C,$$

где $t = \dfrac{x+1}{1-x}$.

4.2.10. Интегралы вида $\displaystyle\int \frac{R(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Здесь $R(x) = \dfrac{T_k(x)}{Q_m(x)}$ — рациональная функция, $T_k(x)$ и $Q_m(x)$ — целые алгебраические многочлены соответственно степеней k и m. Выделяя при $k \geqslant m$ из рациональной дроби $R(x)$ целую часть — многочлен $S(x)$:

$$R(x) = S_{k-m}(x) + \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},\ n < m,$$

и раскладывая полученную правильную дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ в сумму простейших дробей, получаем, что интегрирование функций $\frac{R(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ приводится к вычислению рассмотренных выше интегралов трех типов:

А) $\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$;

Б) $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n \sqrt{ax^2+bx+c}}$;

В) $\int \frac{(Ax+B)dx}{(x^2+px+q)^n \sqrt{ax^2+bx+c}}$,

где квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ не имеет действительных корней.

Пример 4.22. Найти $\int \frac{(x+2)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}$.

Решение. См. пример 4.20.

Пример 4.23. Найти $\int \frac{x^4+x^3+4x-7}{(x^3+1)\sqrt{x^2+1}}dx$.

Решение. Выделяя из дроби $\frac{x^4+x^3+4x-7}{x^3+1}$ целую часть, имеем

$$\frac{x^4+x^3+4x-7}{x^3+1} = x + 1 + \frac{3x-8}{x^3+1}.$$

Разложим дробь $\frac{3x-8}{x^3+1}$ в сумму простейших дробей:

$$\frac{3x-8}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1},$$

откуда $3x - 8 = A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1)$. Полагая в этом равенстве $x = -1$, находим $A = -\frac{11}{3}$. Приравнивая коэффициенты при x^2 и свободные члены, получаем еще два равенства: $A + B = 0$ и $A + C = -8$, откуда определяем $B = \frac{11}{3}$, $C = -\frac{13}{3}$. Следовательно,

$$\int \frac{x^4 + x^3 + 4x - 7}{(x^3+1)\sqrt{x^2+1}}dx =$$

$$= \int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{11}{3}\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{3}\int \frac{(11x-13)dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

Здесь

$$\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + C.$$

Для второго интеграла при $x + 1 > 0$ положим $t = \frac{1}{x+1}$:

$$-\frac{11}{3}\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{11}{3}\int \frac{dt}{\sqrt{1-2t+2t^2}} =$$

$$= \frac{11}{3\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} + \sqrt{1 - \frac{2}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2}}\right| + C.$$

Третий интеграл был вычислен выше в примере 4.21.

Таким образом,

$$\int \frac{x^4 + x^3 + 4x - 7}{(x^3+1)\sqrt{x^2+1}}dx = \sqrt{x^2+1} + \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| +$$

$$+ \frac{11}{3\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} + \sqrt{1 - \frac{2}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2}}\right| -$$

$$-\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x^2+1}{(x-1)^2}} - \frac{4}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{6\left(x^2+1\right)} + \sqrt{2}\,(x+1)}{\sqrt{6\left(x^2+1\right)} - \sqrt{2}\,(x+1)}\right| + C.$$

4.2.11. Интегралы вида

$$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx, \int R\left(x, \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right)dx, \int R\left(x, \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\right)dx$$

Рассмотрим вычисление этих интегралов с помощью тригонометрических и гиперболических подстановок.

1. Рационализацию подынтегрального выражения $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})$, $a > 0$, можно проводить с помощью *тригонометрической подстановки* $x = a\sin t$, где $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. При этом если t «пробегает» отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то переменная x, соответственно, «пробегает» отрезок $[-a; a]$, что отвечает ОДЗ интеграла. Тогда $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cdot |\cos t| = a \cdot \cos t$, так как на промежутке $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ косинус принимает неотрицательные значения. При этом алгебраическое иррациональное выражение $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})$ преобразуется к виду тригонометрического рационального выражения $R(a\sin t, a\cos t)$. В случае $R\left(x, \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right)$ имеем, с учетом ОДЗ, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, а в случае $R\left(x, \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\right)$, соответственно, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

2. Также в этом случае можно было сделать подстановку $x = a\cos t$, где $t \in [0; \pi]$, и тогда вместо иррациональной функции $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})$ получили бы рациональную тригонометрическую функцию $R(a\cos t, a\sin t)$.

Пример 4.24. Найти $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ $(a > 0)$.

Решение. Сделаем тригонометрическую подстановку $x = a\sin t$. Поскольку по ОДЗ $x \in [-a; a]$, то положим $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Тогда $\sqrt{a^2 - x^2} = a|\cos t| = a\cos t$, $dx = a\cos t dt$ и получаем

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = a^2 \int \cos^2 t dt = a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\int dt + \frac{1}{2}\int \cos 2t d(2t)\right) + C = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C =$$

$$=\frac{a^2}{2}\left[\arcsin\frac{x}{a}+\sin\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\cos\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\right]+C=$$
$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C$$

($|x| \leqslant a$).

Замечание. Можно было воспользоваться подстановкой $x = a\cos t$, $t \in [0; \pi]$.

Пример 4.25. Найти $\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx$ ($a > 0$).

Решение. 1-й способ. Положим $x = a\sin t$, где $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда $dx = a\cos t dt$ и приходим к интегралу

$$a\int\sqrt{\frac{1+\sin t}{1-\sin t}}\cos t dt=a\int\frac{\sqrt{1+\sin t}\cdot\sqrt{1+\sin t}}{\sqrt{1-\sin t}\cdot\sqrt{1+\sin t}}\cos t dt=$$
$$=a\int\frac{(1+\sin t)\cos t}{|\cos t|}dt=a\int(1+\sin t)dt=a(t-\cos t)+C=$$
$$=a\left[\arcsin\frac{x}{a}-\cos\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\right]+C=$$
$$=a\cdot\arcsin\frac{x}{a}-a\cdot\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}+C=a\cdot\arcsin\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}+C$$

($-a \leqslant x < a$).

2-й способ. Для сравнения решим задачу с помощью подстановки $x = a\cos 2t$, где $2t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда $dx = -2a\sin 2t dt$, $2t = \arccos\frac{x}{a}$,

$$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}=\sqrt{\frac{1+\cos 2t}{1-\cos 2t}}=\sqrt{\frac{2\cos^2 t}{2\sin^2 t}}=\frac{\cos t}{|\sin t|}=\operatorname{sgn}(\sin t)\frac{\cos t}{\sin t}=\operatorname{sgn} t\frac{\cos t}{\sin t}$$

и, следовательно,

$$\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx=-4a\operatorname{sgn} t\int\cos^2 t dt=-4a\operatorname{sgn} t\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t\right)+C=$$
$$=-a|2t|-a\sin|2t|+C=-a\left|\arccos\frac{x}{a}\right|-a\sin\left|\arccos\frac{x}{a}\right|+C=$$

$$=-a\cdot\arccos\frac{x}{a}-a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}+C=-a\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{x}{a}\right)-\sqrt{a^2-x^2}+C=$$
$$=a\cdot\arcsin\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}+C-\frac{\pi}{2}a.$$

4.2.12. Интегралы вида $\int R(x,\sqrt{a^2+x^2})dx$

1. Для рационализации выражений вида $R(x,\sqrt{a^2+x^2})$ применяют тригонометрическую подстановку $x = a\cdot\operatorname{tg}t$, где $t\in\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$. При этом, когда переменная t «пробегает» указанный интервал $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ в направлении от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, переменная x один раз «пробегает» все множество действительных чисел от $-\infty$ до $+\infty$ (взаимно однозначная замена переменной). В этом случае для корня $\sqrt{a^2+x^2}$ получаем

$$\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2+a^2\cdot\operatorname{tg}^2 t}=a\cdot\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}=\frac{a}{|\cos t|}=\frac{a}{\cos t},$$

так как на рассматриваемом интервале косинус положителен, $dx=\frac{adt}{\cos^2 t}$. В результате иррациональная функция $R(x,\sqrt{a^2+x^2})$ преобразуется к тригонометрическому виду $R\left(a\operatorname{tg}t,\frac{a}{\cos t}\right)$, не содержащему радикалов.

Пример 4.26. Найти $\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}}$ $(a>0)$.

Решение. Положим $x=a\cdot\operatorname{tg}t$, где $t\in\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда приходим к интегралу

$$\frac{1}{a}\int\frac{dt}{\sin t}=\frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}=\frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{t}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}\cos^2\frac{t}{2}}=\frac{1}{a}\int\frac{d\operatorname{tg}\frac{t}{2}}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}=\frac{1}{a}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|+C,$$

где $t=\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$ $(x\neq 0)$.

2. В данной ситуации можно также использовать подстановку $x = a \cdot \operatorname{ctg} t$, где $t \in (0; \pi)$. Тогда

$$\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + a^2 \cdot \operatorname{ctg}^2 t} = a \cdot \sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}} = \frac{a}{|\sin t|} = \frac{a}{\sin t},$$

так как на рассматриваемом интервале синус положителен, $dx = -\dfrac{adt}{\sin^2 t}$. В результате иррациональная функция $R(x, \sqrt{a^2 + x^2})$ преобразуется к тригонометрическому виду $R\left(a \cdot \operatorname{ctg} t,\ \dfrac{a}{\sin t}\right)$.

Пример 4.27. Найти $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 + x^2}}$.

Решение. Положим $x = a \cdot \operatorname{ctg} t$, $t \in (0; \pi)$. Тогда имеем при $x \neq 0$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 + x^2}} = \int \frac{-adt}{\sin^2 t \cdot a \cdot \operatorname{ctg} t \cdot \dfrac{a}{\sin t}} = -\frac{1}{a}\int \frac{dt}{\cos t} = -\frac{1}{a}\int \frac{d(\sin t)}{\cos^2 t} =$$

$$= -\frac{1}{a}\int \frac{d(\sin t)}{\cos^2 t} = \frac{1}{a}\int \frac{d(\sin t)}{\sin^2 t - 1} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{\sin t - 1}{\sin t + 1}\right| + C,$$

где $t = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}$.

3. Выражения $R(x, \sqrt{a^2 + x^2})$ рационализируются также с помощью гиперболической подстановки $x = a \cdot \operatorname{sh} t$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + a^2 \cdot \operatorname{sh}^2 t} = |a| \cdot \sqrt{\operatorname{ch}^2 t} = a \cdot |\operatorname{ch} t| = a \cdot \operatorname{ch} t$$

($\operatorname{ch} t > 0\ \forall t \in \mathbb{R}$).

Пример 4.28. Найти $\int \sqrt{a^2 + x^2}\,dx$ $(a > 0)$.

Решение. Выполним гиперболическую подстановку $x = a \operatorname{sh} t$, $dx = a \operatorname{ch} t dt$, $\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2(1 + \operatorname{sh}^2 t)} = a \operatorname{ch} t$. Переходя к новой переменной, получаем интеграл

$$a^2 \int \operatorname{ch}^2 t dt = a^2 \int \frac{1 + \operatorname{ch} 2t}{2} dt = \frac{a^2}{2}\left(\int t dt + \frac{1}{2}\int \operatorname{ch} 2t d(2t)\right) =$$

$$= \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{4} \operatorname{sh} 2t + C.$$

Осталось сделать обратную подстановку. Из равенства $\operatorname{sh} t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} = \dfrac{x}{a}$ находим, что $e^t = \dfrac{x \pm \sqrt{a^2 + x^2}}{a}$. Так как $e^t > 0$, то $t = \ln\left|x + \sqrt{a^2 + x^2}\right| - \ln a$. Очевидно,

$$\operatorname{sh} 2t = 2\operatorname{sh} t \cdot \operatorname{ch} t = 2\operatorname{sh} t\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t} = 2 \cdot \frac{x}{a} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} = \frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2 + x^2},$$

поэтому окончательно получаем (число $-\dfrac{a^2}{2}\ln a$ вошло в C)

$$\int \sqrt{a^2 + x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{a^2 + x^2}\right| + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2} + C.$$

4.2.13. Интегралы вида

$$\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})dx, \int R\left(x, \sqrt{\frac{x - a}{x + a}}\right)dx, \int R\left(x, \sqrt{\frac{x + a}{x - a}}\right)dx \ (a > 0)$$

Для рационализации выражений вида $R(x, \sqrt{x^2 - a^2})$, $R\left(x, \sqrt{\dfrac{x - a}{x + a}}\right)$, $R\left(x, \sqrt{\dfrac{x + a}{x - a}}\right)$ применяют как тригонометрические, так и гиперболические подстановки.

Рассмотрим случай $R(x, \sqrt{x^2 - a^2})$. Подкоренное выражение определено при $|x| \geqslant a$. Возможны следующие подстановки.

1. $x = \dfrac{a}{\sin t}$, где $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; 0\right) \cup \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, при этом радикал преобразуется следующим образом:

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{\sin^2 t} - a^2} = a \cdot \sqrt{\frac{1 - \sin^2 t}{\sin^2 t}} = a \cdot \sqrt{\left(\frac{\cos t}{\sin t}\right)^2} = a \cdot |\operatorname{ctg} t|,$$

и подынтегральная функция оказывается рационально зависящей от тригонометрических функций: $R\left(\dfrac{a}{\sin t}, a\,|\operatorname{ctg} t|\right)$.

2. Аналогичная подстановка через косинус $x =$, где $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, приводит к следующим преобразованиям:

$$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t}-a^2}=a\cdot\sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}}=a\cdot\sqrt{\left(\frac{\sin t}{\cos t}\right)^2}=a\cdot|\operatorname{tg} t|.$$

И опять подынтегральная функция принимает рациональный (относительно тригонометрических функций) вид $R\left(\frac{a}{\cos t}, a|\operatorname{tg} t|\right)$.

3. Подстановка $x = a\cdot\operatorname{ch} t$, $t \geqslant 0$ (если $x > 0$) или $x = -a\cdot\operatorname{ch} t$, $t \geqslant 0$ (если $x < 0$). Тогда

$$\sqrt{x^2-a^2}=a\cdot\sqrt{\operatorname{sh}^2 t}=a\cdot|\operatorname{sh} t|,$$

и выражение $R(x, \sqrt{x^2-a^2})$ приводится к виду $R(a\operatorname{ch} t, a|\operatorname{sh} t|)$.

При наличии радикала $\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$ в подынтегральном выражении (ОДЗ: $x \in (-\infty; -a) \cup [a; +\infty)$) можно воспользоваться подстановкой $x = \frac{a}{\cos t}$, где $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, и тогда

$$\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{\cos t}-1}{\frac{1}{\cos t}+1}}=\sqrt{\frac{1-\cos t}{1+\cos t}}=\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{2\cos^2\frac{t}{2}}}=\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|.$$

С другой стороны, в этом случае возможна подстановка $x = a\cdot\operatorname{ch} t$:

$$\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}=\sqrt{\frac{\operatorname{ch} t-1}{\operatorname{ch} t+1}}=\sqrt{\frac{2\operatorname{sh}^2\frac{t}{2}}{2\operatorname{ch}^2\frac{t}{2}}}=\left|\operatorname{th}\frac{t}{2}\right|.$$

Замечание. Еще раз обратим внимание читателя на одно обстоятельство. Если подынтегральная функция содержит радикалы вида $\sqrt{x^2-a^2}$ (или $\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$), то в этом случае первообразная ищется на луче $x > a$ или $x < -a$. Так как обычно нет никаких оснований предпочесть один луч другому, то часто выбирают тот луч, на котором будет более простая запись преобразованного подынтегрального выражения, т. е. луч $x > a$ (на другом луче $x < -a$ первообразная находится аналогичными рассуждениями). Поэтому, учитывая это, в указанных выше подстановках можно ограничиться уменьшенными вполовину промежутками по t: $x = \dfrac{a}{\sin t}$ при $t \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, $x = \dfrac{a}{\cos t}$ при $t \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, $x = a \cdot \operatorname{ch} t$ при $t \in [0; +\infty)$. Это позволяет при упрощении радикалов однозначно раскрывать модули. В этой ситуации можно использовать функцию сигнум.

Пример 4.29. Найти $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}$ $(x > a)$.

Решение. Применим тригонометрическую подстановку $x = \dfrac{a}{\cos t}$, где $t \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Имеем

$$dx = \frac{a \sin t dt}{\cos^2 t} = \frac{a \operatorname{tg} t dt}{\cos t},$$

$$\sqrt{(x^2-a^2)^3} = \sqrt{\left(\frac{a^2}{\cos^2 t} - a^2\right)^3} = a^3 \sqrt{\operatorname{tg}^6 t} = a^3 \operatorname{tg}^3 t.$$

Подставляя в интеграл, получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dt}{\operatorname{tg}^2 t \cos t} = \frac{1}{a^2} \int \frac{\cos t dt}{\sin^2 t} =$$

$$= \frac{1}{a^2} \int \frac{d(\sin t)}{\sin^2 t} = -\frac{1}{a^2 \sin t} + C.$$

Осталось сделать обратную подстановку. Так как $x = \dfrac{a}{\cos t}$, то $\cos t = \dfrac{a}{x}$,

$$\sin t = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} = \sqrt{\frac{x^2-a^2}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}.$$

Следовательно, $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}} = -\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}} + C.$

Пример 4.30. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$ $(x > a)$.

Решение. Применим гиперболическую подстановку $x = a\,\mathrm{ch}\,t$, $t \geqslant 0$. Тогда $dx = a\,\mathrm{sh}\,t dt$, $\sqrt{x^2-a^2} = a|\mathrm{sh}\,t| = a\,\mathrm{sh}\,t$ и интеграл сводится к интегралу $\int dt = t + C$. Сделаем обратную подстановку: $x = a\,\mathrm{ch}\,t \Leftrightarrow \mathrm{ch}\,t = \frac{x}{a} \Leftrightarrow t = \mathrm{Arch}\frac{x}{a}$, где обратная функция к указанной ветви гиперболического косинуса имеет вид $\mathrm{Arch}\,x = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$, $x \geqslant 1$. Итак,

$$\int dt = t + C = \mathrm{Arch}\frac{x}{a} + C = \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}\right) + C =$$

$$= \ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) + C',$$

где в постоянную C' здесь включено слагаемое $(-\ln a)$.

Пример 4.31. Найти $\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx$ $(x \geqslant a)$.

Решение. В некоторых случаях при вычислении интегралов рассматриваемого вида наряду с указанными подстановками можно применять и другие. Например, в данном случае положим $x - a = 2a\,\mathrm{sh}^2 t$, тогда $x + a = 2a(\mathrm{sh}^2 t + 1) = 2a\,\mathrm{ch}^2 t$ и $\sqrt{\frac{x-a}{x+a}} = \sqrt{\frac{2a\,\mathrm{sh}^2 x}{2a\,\mathrm{ch}^2 x}} = \frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x}$, $dx = 4a\,\mathrm{sh}\,t \cdot \mathrm{ch}\,t \cdot dt$ и приходим к интегралу

$$\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx = 4a\int \mathrm{sh}^2\,t dt = 4a\int \frac{\mathrm{ch}\,2t - 1}{2}dt = a\,\mathrm{sh}\,2t - 2at + C.$$

Учитывая, что $\mathrm{sh}\,t = \sqrt{\frac{x-a}{2a}}, \mathrm{ch}\,t = \sqrt{\frac{x+a}{2a}}$, имеем $a \cdot \mathrm{sh}\,t = 2a \cdot \mathrm{sh}\,t \cdot \mathrm{ch}\,t = \sqrt{x^2-a^2}$. Далее, $\mathrm{sh}\,t + \mathrm{ch}\,t = e^t$, отсюда

$$t = \ln(\mathrm{sh}\,t + \mathrm{ch}\,t) = \ln\left(\frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{2a}}\right) =$$

$$= \ln(\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}) - \ln\sqrt{2a}.$$

Окончательно получим

$$\int\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx=\sqrt{x^2-a^2}-2a\ln(\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a})+C',$$

где $C'=C-\ln\sqrt{2a}$.

4.2.14. Первая подстановка Эйлера $\sqrt{ax^2+bx+c}=t-x\sqrt{a}$

Интегралы вида $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ в общем случае могут вычисляться с помощью рационализирующих подстановок Эйлера. *Первая подстановка Эйлера* применима в случае, когда $a>0$. Положим $\sqrt{ax^2+bx+c}=t-x\sqrt{a}$ (можно также было положить $\sqrt{ax^2+bx+c}=t+x\sqrt{a}$). Возведем это равенство в квадрат:

$$ax^2+bx+c=(t-x\sqrt{a})^2,\ ax^2+bx+c=t^2-2tx\sqrt{a}+ax^2,$$

откуда выражаем x через t: $x=\dfrac{t^2-c}{2\sqrt{a}\cdot t+b}$.

Тогда $dx=2\cdot\dfrac{\sqrt{a}\cdot t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}\cdot t+b)^2}dt$,

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-x\sqrt{a}=t-\sqrt{a}\cdot\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\cdot t+b}=\frac{\sqrt{a}\cdot t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\cdot t+b}.$$

Переходя к новой переменной интегрирования, получаем интеграл от рациональной дроби

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx=$$

$$=\int R\left(\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b},\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b}\right)\cdot 2\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t+b)^2}dt.$$

Вычислив интеграл, необходимо сделать обратную подстановку $t=\sqrt{ax^2+bx+c}+x\sqrt{a}$.

Пример 4.32. Найти $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$.

Решение. Поскольку старший коэффициент квадратного трехчлена положителен, то применим первую подстановку Эйлера: $\sqrt{x^2+a}=t-x$. Возводя обе части этого равенства в квадрат, получим $x^2 + a = t^2 - 2tx + x^2$, или $x = \dfrac{t^2 - a}{2t}$.

Дифференцируя данное равенство, находим $dx = \dfrac{t^2 + a}{2t^2}dt$, $\sqrt{x^2+a} = \dfrac{t^2 + a}{2t}$. Подставляя в подынтегральное выражение, получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C.$$

Пример 4.33. Найти $\displaystyle\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.

Решение. Так как старший коэффициент квадратного трехчлена положителен, здесь также возможно применение первой подстановки Эйлера: $\sqrt{x^2-x+1}=t-x$. Теперь возведем это равенство в квадрат:

$$x^2 - x + 1 = (t-x)^2 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = t^2 - 2tx + x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{t^2 - 1}{2t - 1}.$$

Дифференцируя, находим $dx = \left(\dfrac{t^2-1}{2t-1}\right)' dt = 2\cdot\dfrac{t^2-t+1}{(2t-1)^2}dt$. Переходя к новой переменной, получаем интеграл $2\cdot\displaystyle\int \frac{t^2 - t + 1}{t(2t-1)^2}dt$. Далее представляем подынтегральную функцию в виде суммы простейших дробей и вычисляем:

$$2\cdot\int \frac{t^2-t+1}{t(2t-1)^2}dt = \int\left(\frac{2}{t} - \frac{3}{2t-1} + \frac{3}{(2t-1)^2}\right)dt =$$

$$=2\int\frac{dt}{t} - \frac{3}{2}\int\frac{dt}{t-\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}\int\frac{d(2t-1)}{(2t-1)^2} = 2\ln|t| - \frac{3}{2}\ln\left|t-\frac{1}{2}\right| - \frac{3}{2(2t-1)} + C,$$

где $t = x+\sqrt{x^2-x+1}$.

4.2.15. Вторая подстановка Эйлера

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}$$

Вторая подстановка Эйлера применима при вычислении интегралов вида $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$, если свободный член $c > 0$.

Положим $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}$ (можно также было положить $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt-\sqrt{c}$). Возведем данное равенство в квадрат: $ax^2+bx+c=x^2t^2+2xt\sqrt{c}+c$. После сокращения на $x \neq 0$ имеем для x: $x=\dfrac{2\sqrt{c}\cdot t-b}{a-t^2}$. Тогда $dx=2\cdot\dfrac{\sqrt{c}\cdot t^2-bt+a\sqrt{c}}{(a-t^2)^2}dt$,

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}=\frac{2\sqrt{c}\cdot t-b}{a-t^2}\cdot t+\sqrt{c}=\frac{\sqrt{c}\cdot t^2-bt+a\sqrt{c}}{a-t^2}.$$

В результате замены переменной приходим к интегралу от рациональной дроби

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx=$$

$$=\int R\left(\frac{2\sqrt{c}t-b}{a-t^2},\frac{\sqrt{c}t^2-bt+a\sqrt{c}}{a-t^2}\right)\cdot 2\frac{\sqrt{c}t^2-bt+a\sqrt{c}}{(a-t^2)^2}dt.$$

Вычислив интеграл, в конце подставим $t=\dfrac{\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{c}}{x}$.

Пример 4.34. Найти $\displaystyle\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.

Решение. Рассмотрим интеграл из предыдущего примера, но теперь вычислим его при помощи второй подстановки Эйлера (так как свободный член квадратного трехчлена $c = 1 > 0$, это возможно). Положим $\sqrt{x^2-x+1}=xt-1$, возведем в квадрат: $x^2-x+1=x^2t^2-2xt+1$.

После сокращения на x выражаем из оставшегося равенства x через t: $x=\dfrac{2t-1}{t^2-1}$. Тогда $dx=-2\cdot\dfrac{t^2-t+1}{(t^2-1)^2}dt$ и

$$\sqrt{x^2-x+1}=xt-1=\frac{t^2-t+1}{t^2-1},\ x+\sqrt{x^2-x+1}=\frac{t}{t-1}.$$

Подставляя в интеграл, получим

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}} = \int \frac{-2t^2+2t-2}{t(t-1)(t+1)^2}\,dt =$$

$$= \int \left(\frac{2}{t} - \frac{1}{2(t-1)} - \frac{3}{2(t+1)} - \frac{3}{(t+1)^2} \right) dt =$$

$$= 2\int \frac{dt}{t} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t-1} - \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t+1} - 3\int \frac{dt}{(t+1)^2} =$$

$$= 2\ln|t| - \frac{1}{2}\ln|t-1| - \frac{3}{2}\ln|t+1| + \frac{3}{t+1} + C,$$

где $t = \dfrac{\sqrt{x^2-x+1}+1}{x}$.

4.2.16. Третья подстановка Эйлера

$$\sqrt{a(x-\lambda)(x-\mu)} = t(x-\lambda)$$

Третья подстановка Эйлера применяется при вычислении интегралов $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ в случае, когда квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет различные вещественные корни λ и μ, т. е. $ax^2 + bx + c = a(x-\lambda)(x-\mu)$.

Положим $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\lambda)$. Возведем равенство в квадрат:

$$a(x-\lambda)(x-\mu) = t^2(x-\lambda)^2.$$

Сократим на $x - \lambda \neq 0$ и, выражая x через t, получим $x = \dfrac{-a\mu + \lambda t^2}{t^2 - a}$. Дифференцируя, находим $dx = \dfrac{2a(\mu-\lambda)t}{(t^2-a)^2}dt$, $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\lambda) = \dfrac{a(\lambda-\mu)t}{t^2-a}$. Подставляя в исходный интеграл, получаем интеграл от рациональной дроби

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx = \int R\left(\frac{-a\mu+\lambda t^2}{t^2-a}, \frac{a(\lambda-\mu)t}{t^2-a} \right) \cdot \frac{2a(\mu-\lambda)t}{(t^2-a)^2}\,dt.$$

Вычислив интеграл, в конце выполним обратную подстановку $t = \dfrac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x-\lambda}$.

Пример 4.35. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

Решение. Для вычисления интеграла воспользуемся третьей подстановкой Эйлера: $\sqrt{a^2 - x^2} = t(a - x)$. Возведем равенство в квадрат: $(a + x)(a - x) = t(a - x)$, откуда найдем $x = a \cdot \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$. Тогда получаем следующее соотношение между дифференциалами: $dx = \frac{4atdt}{(t^2 + 1)^2}$. Кроме того, $\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{2at}{t^2 + 1}$. Переходя к новой переменной под знаком интеграла, получаем при $|x| < a$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 2 \cdot \int \frac{dt}{t^2 + 1} = 2\operatorname{arctg} t + C = 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a + x}{a - x}} + C.$$

Пример 4.36. Найти $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}}$.

Решение. Поскольку квадратный трехчлен под знаком радикала имеет два различных действительных корня $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$, то применим третью подстановку Эйлера: $\sqrt{1 - 2x - x^2} = t(x + 1 + \sqrt{2})$. Переписав данное равенство в виде

$$\sqrt{-(x + 1 - \sqrt{2})(x + 1 + \sqrt{2})} = t(x + 1 + \sqrt{2}),$$

возведем его в квадрат и сократим на $(x + 1 + \sqrt{2})$. Выражая затем x через t, получим

$$x = \frac{-t^2(\sqrt{2} + 1) + \sqrt{2} - 1}{t^2 + 1}, \sqrt{1 - 2x - x^2} = \frac{2\sqrt{2}t}{t^2 + 1},$$

$$1 + \sqrt{1 - 2x - x^2} = \frac{t^2 + 2\sqrt{2}t + 1}{t^2 + 1}, dx = -\frac{4\sqrt{2}tdt}{(t^2 + 1)^2}.$$

Таким образом, сводим исходный интеграл к интегралу от рациональной дроби:

$$\int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}} = -4\sqrt{2}\int \frac{tdt}{(t^2 + 1)(t^2 + 2\sqrt{2}t + 1)},$$

который вычисляем стандартным образом.

Подстановки Эйлера, играя важную теоретическую роль, на практике часто приводят к громоздким выкладкам, поэтому к ним прибегают в крайних случаях, когда не удается более просто вычислить интеграл другим способом.

4.3. Интегрирование биномиальных дифференциалов

Биномиальными называются дифференциалы вида $x^m(a + bx^n)^p dx$, где a, b — действительные числа, отличные от нуля; m, n, p — рациональные числа.

Как доказал П. Л. Чебышёв[1], первообразная для функции $x^m(a + bx^n)^p$ является элементарной функцией только в следующих трех случаях:

1) p — целое;

2) $\dfrac{m+1}{n}$ — целое;

3) $\dfrac{m+1}{n} + p$ — целое.

Рассмотрим эти случаи.

1. Если p — целое, то полагают $t=\sqrt[s]{x}$, где s — общий (натуральный) знаменатель дробей m и n (см. интегрирование линейных иррациональностей).

Пример 4.37. Найти $\int \dfrac{\sqrt{x}dx}{(1+\sqrt[3]{x})^2}$.

Решение. Перепишем интеграл в виде $\int x^{\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-2} dx$. Очевидно, что $m = \dfrac{1}{2}$, $n = \dfrac{1}{3}$, $p = -2$, $a = b = 1$.

Положим $t=\sqrt[6]{x}$, тогда $x = t^6$, $\sqrt{x}=t^3$, $\sqrt[3]{x}=t^2$, $dx = 6t^5dt$ и в результате замены переменной интегрирования приходим к следующему интегралу:

---

[1] *Чебышёв Пафнутий Львович* (1821—1894) — русский математик и механик, академик Петербургской академии наук. Окончил Московский университет. Является основателем Петербургской математической школы. Занимался теорией приближения функций многочленами, интегральным исчислением, теорией чисел, теорией вероятностей, теорией машин и механизмов и пр.

$$6\int\frac{t^8dt}{(1+t^2)^2}=6\int\left(t^4-2t^2+3-\frac{4t^2+3}{(1+t^2)^2}\right)dt=$$
$$=6\int\left(t^4-2t^2+3-\frac{3(t^2+1)+t^2}{(1+t^2)^2}\right)dt=$$
$$=\frac{6}{5}t^5-4t^3+18t-18\operatorname{arctg}t-6\int\frac{t^2dt}{(1+t^2)^2},$$

где $\int\frac{t^2dt}{(1+t^2)^2}=-\frac{1}{2}\int td\left(\frac{1}{1+t^2}\right)=-\frac{t}{2(1+t^2)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t+C.$

Следовательно, при $x\geqslant 0$ имеем

$$\int\frac{\sqrt{x}dx}{(1+\sqrt[3]{x})^2}=\frac{6}{5}t^5-4t^3+18t+\frac{3t}{1+t^2}-21\operatorname{arctg}t+C,$$

где $t=\sqrt[6]{x}$.

2. Если $\dfrac{m+1}{n}$ — целое, то полагают $t=\sqrt[s]{a+bx^n}$, где s — знаменатель дроби p.

Пример 4.38. Найти $\int\frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$.

Решение. Перепишем интеграл в виде $\int x\left(1+x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}dx$, откуда определяем $m=1$, $n=\frac{2}{3}$, $p=\frac{1}{2}$, $s=2$. Так как $\frac{m+1}{n}=3$ — целое, то положим $t=\sqrt{1+x^{\frac{2}{3}}}$. Тогда $x=(t^2-1)^{\frac{3}{2}}$, $dx=\frac{3}{2}(t^2-1)^{\frac{1}{2}}2tdt$. Следовательно,

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}=3\int(t^2-1)^2dt=\frac{3}{5}t^5-2t^3+3t+C,$$

где $t=\sqrt{1+x^{\frac{2}{3}}}$.

3. Если $\dfrac{m+1}{n}+p$ — целое, то рекомендуемая подстановка $t=\sqrt[s]{ax^{-n}+b}$, где s — знаменатель дроби p.

Пример 4.39. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

Решение. Приведем интеграл к виду $\int x^0(1+x^4)^{-\frac{1}{4}}dx$ и определяем $m = 0, n = 4, p = -\frac{1}{4}, s = 4$. Поскольку $\frac{m+1}{n} + p = 0$ — целое, то положим, следуя рекомендации, $t = \sqrt[4]{1+x^{-4}}$. Тогда $x = (t^4 - 1)^{-\frac{1}{4}}, dx = -t^3(t^4 - 1)^{-\frac{5}{4}}dt, \sqrt[4]{1+x^4} = t(t^4 - 1)^{-\frac{1}{4}}$. Следовательно,

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = -\int \frac{t^2dt}{t^4 - 1} = \int\left(\frac{A}{t+1} + \frac{B}{t-1} + \frac{Cx+D}{t^2+1}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1}\right)dt - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C,$$

где $t = \sqrt[4]{1+x^{-4}}$.

4.4. Умножение на сопряженное выражение, нестандартные подстановки и другие преобразования

1. При интегрировании выражений, содержащих радикалы, иногда возможно использование известного приема *умножения* (*с одновременным делением*) *на сопряженное выражение*.

Пример 4.40. Найти $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx$ $(a > 0)$.

Решение. На ОДЗ имеем $-a \leqslant x < a$, и поэтому

$$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}}.$$

Умножим и разделим подынтегральную дробь на выражение, сопряженное знаменателю. В результате интеграл удается свести к сумме двух более простых интегралов:

$$\int \frac{\sqrt{a+x}\cdot\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}\cdot\sqrt{a+x}}dx = \int \frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = a\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} + \int \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}} =$$

$$= a\cdot\arcsin\frac{x}{a} - \frac{1}{2}\int \frac{d(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}} = a\cdot\arcsin\frac{x}{a} + \sqrt{a^2-x^2} + C.$$

Пример 4.41. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}$ $(a \neq b)$.

Решение. Умножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное к знаменателю, т. е. на $\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}} = \int \frac{(\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b})}{a-b}dx =$$

$$= \frac{1}{a-b}\left(\int \sqrt{x+a}dx - \int \sqrt{x+b}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{a-b}\left(\int \sqrt{x+a}d(x+a) - \int \sqrt{x+b}d(x+b)\right) =$$

$$= \frac{1}{a-b}\left(\frac{2}{3}(x+a)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(x+b)^{\frac{3}{2}}\right) + C$$

$(x \geqslant -a,\, x \geqslant -b)$.

2. В следующем примере используется прием *выделения полного квадрата* в подкоренном выражении.

Пример 4.42. Найти $\int \frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}dx$.

Решение. Если заметить, что под знаком квадратного корня находится полный квадрат, то это позволяет избавиться от радикала и тем самым существенно упростить вычисление интеграла:

$$\int \frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}dx = \int \frac{\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2}}{x^3}dx = \int \frac{x^2+\frac{1}{x^2}}{x^3}dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^5}\right)dx = \ln|x| - \frac{1}{4x^4} + C$$

$(x \neq 0)$.

3. Часто при интегрировании используются различные подстановки, в том числе нестандартные.

Пример 4.43. Найти $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}$.

Решение. Преобразуем подынтегральное выражение:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{(1+x^2)+(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}} = \int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}.$$

Воспользуемся тем, что $\dfrac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = d(\sqrt{1+x^2})$. Тогда имеем

$$\int \frac{d(\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}} = \int \frac{d(1+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}.$$

Положим $t = 1+\sqrt{1+x^2}$. Тогда

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}} + C.$$

Пример 4.44. Найти $\int x\sqrt{\dfrac{x}{2a-x}}dx$ $(a > 0)$.

Решение. Согласно ОДЗ $\dfrac{x}{2a-x} \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in [0; 2a)$. Сделаем тригонометрическую подстановку вида $x = 2a\sin^2 t$, где $t \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Приходим к интегралу

$$\int (2a\sin^2 t)\sqrt{\frac{2a\sin^2 t}{2a-2a\sin^2 t}}d(2a\sin^2 t) = 8a^2\int \sin^4 t dt =$$

$$= 8a^2\int \left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2 dt = 8a^2\int \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{1}{4}\cos^2 2t\right) dt =$$

$$= 8a^2\int \left(\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{1}{8}\cos 4t\right) dt = a^2\left(3t-2\sin 2t+\frac{1}{4}\sin 4t\right)+C.$$

Осталось сделать обратную подстановку. Очевидно,

$$\sin t = \sqrt{\frac{x}{2a}}, \cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\frac{2a-x}{2a}},$$

тогда

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\cdot\sqrt{\frac{x}{2a}}\cdot\sqrt{\frac{2a-x}{2a}} = \frac{1}{a}\cdot\sqrt{x(2a-x)}.$$

Найдем $\cos 2t$. Если $t \in \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right)$ $(x \in [0; a))$, то $\cos 2t > 0$ и

$$\cos 2t = \sqrt{1-\sin^2 2t} = \sqrt{1-\frac{x(2a-x)}{a^2}} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - x(2a-x)} =$$

$$= \frac{1}{a}\sqrt{(a-x)^2} = \frac{|a-x|}{a} = \frac{a-x}{a}.$$

Если же $t \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$, т. е. $x \in [a; 2a)$, то $\cos 2t \leqslant 0$ и, следовательно,

$$\cos 2t = -\sqrt{1-\sin^2 2t} = -\frac{|a-x|}{a} = \frac{a-x}{a}.$$

Таким образом, $\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ $\cos 2t = \frac{a-x}{a}$. Поэтому

$$\sin 4t = 2\sin 2t \cos 2t = \frac{2}{a}\sqrt{x(2a-x)}\,\frac{a-x}{a}.$$

Подставляя, получим для исходного интеграла

$$\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx =$$

$$= a^2\left[3\arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}} - \frac{2}{a}\sqrt{x(2a-x)} + \frac{1}{2a}\sqrt{x(2a-x)}\left(1-\frac{x}{a}\right)\right] + C =$$

$$= 3a^2 \arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}} - \frac{3a+x}{2}\sqrt{x(2a-x)} + C.$$

Пример 4.45. Найти $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$.

Решение. Положим $t = \sqrt{x}+\sqrt{x+1}$, тогда $x = \left(\frac{t^2-1}{2t}\right)^2$.

Переходя к новой переменной, получим

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{t^3-t^2+t-1}{t^3}dt = \frac{t}{2} - \frac{1}{2}\ln t - \frac{1}{2t} + \frac{1}{4t^2} + C =$$

$$= \sqrt{x} - \frac{1}{2}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}) + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{x^2+x} + C \ (x \geqslant 0).$$

К интегралам от квадратичных иррациональностей естественным образом примыкают интегралы от иррациональностей следующего вида:

$$\int R(x, \sqrt{ax^3+bx^2+cx+d})dx, \int R(x, \sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+ex+r})dx,$$

содержащие под знаком радикала многочлены 3-й и 4-й степеней (с действительными коэффициентами). Эти интегралы часто встречаются в приложениях и, вообще говоря, не являются элементарными функциями. Оба эти интеграла принято называть *эллиптическими* в тех случаях, когда они не выражаются через элементарные функции, и *псевдоэллиптическими* в тех случаях, когда они выражаются через элементарные функции (происхождение названия интегралов связано с тем, что впервые с этими интегралами столкнулись при решении задачи о вычислении длины дуги эллипса). Среди эллиптических интегралов особенно важную роль играют так называемые эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода в *форме Лежандра*

$$F(k,\varphi)=\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\ \text{ и }\ E(k,\varphi)=\int\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi.$$

Для этих функций составлены обширные таблицы и графики. А. Лежандром и другими математиками изучены свойства данных функций и установлен ряд формул.

Наряду с элементарными функциями функции $F(k,\varphi)$ и $E(k,\varphi)$ прочно вошли в семейство функций, часто используемых в анализе.

Задачи для самостоятельного решения

Найти неопределенные интегралы.

4.1. $\int x\sqrt{x-2}\,dx$. **4.2.** $\int x^2\cdot\sqrt[3]{1-x}\,dx$. **4.3.** $\int\frac{x}{\sqrt{x+4}}dx$.

4.4. $\int\frac{dx}{(3-x)\sqrt{1-x}}$. **4.5.** $\int\frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx$.

4.6. $\int\frac{dx}{(2x+1)^{\frac{2}{3}}-(2x+1)^{\frac{1}{2}}}$. **4.7.** $\int\frac{\sqrt[6]{2x-1}+1}{(2x-1)(\sqrt[3]{2x-1}-1)}dx$.

4.8. $\int\frac{\sqrt[3]{x+1}+\sqrt{x+1}}{(x+1)(4-\sqrt[3]{x+1})}dx$. **4.9.** $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$. **4.10.** $\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx$.

4.11. $\int x\sqrt{\frac{x+2}{x-3}}dx$. **4.12.** $\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\frac{dx}{x+1}$. **4.13.** $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}$.

4.14. $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$. **4.15.** $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$.

4.16. $\int\frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$. **4.17.** $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x}}$. **4.18.** $\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2-6x+9}}$.

4.19. $\int \frac{dx}{\sqrt{6-4x-2x^2}}$. **4.20.** $\int \frac{5x+3}{\sqrt{-x^2+4x+5}}dx$.

4.21. $\int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+x+2}}dx$. **4.22.** $\int \sqrt{x^2+4x+13}dx$.

4.23. $\int \sqrt{5+4x-x^2}dx$. **4.24.** $\int x\sqrt{1-x^2}dx$.

4.25. $\int (1-3x)\sqrt{1+x-x^2}dx$. **4.26.** $\int (x+1)\sqrt{x^2+4x+1}dx$.

4.27. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$. **4.28.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2-2x-1}}$.

4.29. $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+2x}}$. **4.30.** $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

4.31. $\int \frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{x^2+x+1}}$. **4.32.** $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}$. **4.33.** $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$.

4.34. $\int \frac{x^2+2x+3}{\sqrt{-x^2+4x}}dx$. **4.35.** $\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}dx$. **4.36.** $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$.

4.37. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$. **4.38.** $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{1+x^5}}$. **4.39.** $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}(1+\sqrt{x})^2}$.

4.40. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}(1+\sqrt[3]{x^2})}$. **4.41.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x}+1)^{10}}$. **4.42.** $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$.

4.43. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3}}$. **4.44.** $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx$.

4.45. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$. **4.46.** $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}}$.

4.47. $\int \frac{x^2dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}$. **4.48.** $\int \frac{dx}{(1-x^4)\sqrt{1+x^2}}$.

4.49. $\int \frac{(x+1)dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$. **4.50.** $\int \frac{xdx}{(x^2-1)\sqrt{x^2-x-1}}$.

4.51. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$. **4.52.** $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.

4.53. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x-2}}$. **4.54.** $\int \frac{dx}{(1+\sqrt{x(1+x)})^2}$.

4.55. $\int \frac{x^4-5x^3+6x-7}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx$.

Глава 5
ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

При интегрировании тригонометрических функций наряду с алгебраическими преобразованиями эффективно используются всевозможные тригонометрические преобразования. Все интегралы вычисляются на промежутках области определения, где подынтегральные функции определены и непрерывны.

В простейших случаях интегралы вычисляются непосредственным сведением их к табличным. Но в большинстве случаев надо знать подходы и осознанно применять их там, где нужно. Рассмотрим отдельные классы интегралов от тригонометрических функций и общие рекомендации по их вычислению.

5.1. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$

Здесь, как и прежде, под R понимается рациональная функция своих аргументов. Это достаточно широкий класс интегралов, если учесть, что $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ также выражаются через синус и косинус. Рассмотрим методы вычисления интегралов данного вида.

5.1.1. Метод универсальной подстановки

Интегралы $\int R(\sin x, \cos x)dx$ приводятся к интегралам от рациональных функций с помощью *универсальной тригонометрической подстановки* $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ (или $t = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$). Тогда $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $x = 2\operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, и далее интегралы вычисляются соответствующими методами интегрирования рациональных дробей. Обратим еще раз внимание на то, что применение подстановки $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ возможно только на промежутках, не содержащих точек вида $\pi + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$ $(-\pi + 2\pi n < x < \pi + 2\pi n)$. В дальнейшем это подразумевается. К недостаткам этого подхода можно отнести тот факт, что универсальная подстановка во многих случаях приводит к сложным вычислениям. В частности, этим методом можно вычислять интегралы вида $\displaystyle\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c}$.

Пример 5.1. Найти $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x + 2}$.

Решение. Вычисляем:

$$\int \frac{dx}{\sin x+2} = \int \frac{\dfrac{2dt}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}+2} = \int \frac{dt}{t^2+t+1} = \int \frac{dt}{\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}} =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C,$$

где $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

Пример 5.2. Найти $\displaystyle\int \frac{\cos x dx}{\sin x(1-\cos x)}$.

Решение. Положим $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, тогда приходим к интегралу

$$\int \frac{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\cdot\dfrac{2tdt}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}\left(1-\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = \frac{1}{2}\int \frac{1-t^2}{t^2}dt = \frac{1}{2}\left(\int \frac{dt}{t^2} - \int dt\right) =$$
$$= -\frac{1}{2t} - \frac{t}{2} + C = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$$

В некоторых случаях вычисление интегралов данного типа может быть упрощено за счет выбора других, более удачных подстановок.

5.1.2. Случай, когда $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$

Если подынтегральная функция нечетна относительно $\sin x$, т. е. при всех x из области интегрирования верно $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то интеграл рационализируется с помощью подстановки $t = \cos x$.

Пример 5.3. Найти $\int \operatorname{tg} x dx$.

Решение. Вычисляем:

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$$

$(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z})$.

Пример 5.4. Найти $\int \frac{(\sin x + \sin^3 x)dx}{\cos 2x}$ $(x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z})$.

Решение. Заметив, что подынтегральная функция $\frac{\sin x(1 + \sin^2 x)}{1 - 2\sin^2 x}$ нечетна относительно $\sin x$, сделаем рекомендуемую подстановку $t = \cos x$. Тогда $\sin^2 x = 1 - t^2$, $-\sin x dx = dt$, и получаем

$$\int \frac{(2-\cos^2 x)(-d\cos x)}{2\cos^2 x - 1} = \int \frac{(t^2-2)dt}{2t^2-1} = \int \frac{t^2 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{2\left(t^2 - \frac{1}{2}\right)} dt = \frac{t}{2} - \frac{3}{4}\int \frac{dt}{t^2 - \frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{t}{2} - \frac{3}{4\sqrt{2}} \ln\left|\frac{t - \frac{1}{\sqrt{2}}}{t + \frac{1}{\sqrt{2}}}\right| + C = \frac{\cos x}{2} - \frac{3}{4\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}}\right| + C.$$

Пример 5.5. Найти $\int \frac{\sin 2x dx}{4\cos^2 x + 12\cos x - 7}$ $(x \neq \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z})$

Решение. Так как подынтегральная функция нечетна относительно $\sin x$, сделаем подстановку $t = \cos x$. Тогда получаем интеграл

$$\int \frac{-2tdt}{4\left(t^2 + 3t + \frac{9}{4}\right) - 16} = -\frac{1}{2}\int \frac{tdt}{\left(t + \frac{3}{2}\right)^2 - 4} = -\frac{1}{2}\int \frac{udu}{u^2 - 4} + \frac{3}{4}\int \frac{du}{u^2 - 4} =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln\left|\left(\cos x+\frac{3}{2}\right)^2-4\right|+\frac{3}{16}\ln\left|\frac{\cos x-\frac{1}{2}}{\cos x+\frac{7}{2}}\right|+C.$$

5.1.3. Случай, когда $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$

Если подынтегральная функция $R(\sin x, \cos x)$ нечетна относительно $\cos x$, т. е. при всех допустимых x верно равенство $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то рекомендуется подстановка $t = \sin x$.

Пример 5.6. Найти $\int \frac{(\cos^3 x + \cos^5 x)dx}{\sin^2 x + \sin^4 x}$.

Решение. Поскольку подынтегральная функция $\frac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^2 x + \sin^4 x}$ нечетна относительно $\cos x$, то положим $t = \sin x$. Получим интеграл ($x \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$):

$$\int \frac{(1-t^2)(2-t^2)dt}{t^2+t^4} = \int\left(1+\frac{2}{t^2}-\frac{6}{1+t^2}\right)dt =$$
$$= \sin x - \frac{2}{\sin x} - 6\operatorname{arctg}(\sin x) + C.$$

Пример 5.7. Найти $\int \frac{\cos x dx}{\cos^4 x + \sin^4 x + 2\sin^2 x + 1}$.

Решение. Замечая, что подынтегральная функция нечетна относительно $\cos x$, положим $t = \sin x$:

$$\int \frac{d(\sin x)}{(1-\sin^2 x)^2+\sin^4 x+2\sin^2 x+1} = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^4+1} =$$
$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{t+\sqrt{2}}{t^2+t\sqrt{2}+1}dt - \frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{t-\sqrt{2}}{t^2-t\sqrt{2}+1}dt =$$
$$= \frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\frac{\sin^2 x+\sqrt{2}\sin x+1}{\sin^2 x-\sqrt{2}\sin x+1} +$$
$$+ \frac{1}{4\sqrt{2}}\left[\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\sin x+1)+\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\sin x-1)\right]+C.$$

5.1.4. Случай, когда $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$

Если подынтегральная функция $R(\sin x, \cos x)$ четна относительно синуса и косинуса, т.е. при всех допустимых x выполняется тождество $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то к цели приводит подстановка $t = \operatorname{tg} x$, $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$ (или $t = \operatorname{ctg} x$, $\pi n < x < \pi n$), где $n \in \mathbb{Z}$. При этом $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $dx = \frac{dt}{1 + t^2}$. В частности, этим способом можно вычислять тригонометрические интегралы вида $\int \frac{dx}{a\sin^2 x + b\sin x \cdot \cos x + c\cos^2 x}$.

Пример 5.8. Найти $\int \operatorname{tg}^2 x dx$.

Решение. Вычисляем:

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \operatorname{tg}^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} d(\operatorname{tg} x) =$$
$$= \int \frac{(\operatorname{tg}^2 x + 1) - 1}{1+\operatorname{tg}^2 x} d(\operatorname{tg} x) = \int d(\operatorname{tg} x) - \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{1+\operatorname{tg}^2 x} =$$
$$= \operatorname{tg} x - \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) + C = \operatorname{tg} x - x + C$$

$(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z})$.

Однако проще было поступить следующим образом:

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

Пример 5.9. Найти $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x \cos x - \cos^2 x}$.

Решение. Вычисляем:

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x(\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 1)} = \int \frac{d\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 1} = \int \frac{d(\operatorname{tg} x + 1)}{(\operatorname{tg} x + 1)^2 - (\sqrt{2})^2} =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\operatorname{tg} x + 1 - \sqrt{2}}{\operatorname{tg} x + 1 + \sqrt{2}}\right| + C$$

$(\operatorname{tg} x \neq -1 \pm \sqrt{2})$.

Пример 5.10. Найти $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x(\sin x + \cos x)}$.

Решение. Поделив одновременно числитель и знаменатель дроби на $\cos x$, приходим к интегралу

$$\int \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\left(\frac{\sin x}{\cos x}+1\right)} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\operatorname{tg} x d(\operatorname{tg} x)}{1+\operatorname{tg} x} = -\ln|1+\operatorname{tg} x| + \operatorname{tg} x + C$$

$(\operatorname{tg} x \neq -1)$.

Замечание. Любое рациональное выражение $R(u, v)$ аргументов u и v всегда можно представить в виде суммы трех выражений, рассмотренных в подпараграфах 5.1.2—5.1.4:

$$R(u,v) = \frac{R(u,v)-R(-u,v)}{2} + \frac{R(-u,v)-R(-u,-v)}{2} + \\ + \frac{R(-u,-v)+R(u,v)}{2},$$

или $R(u, v) = R_1(u, v) + R_2(u, v) + R_3(u, v)$, где функция $R_1(u, v)$ нечетна относительно u, функция $R_2(u, v)$ нечетна относительно v, а функция $R_3(u, v)$ четна относительно u и v. Поэтому мы рассмотрели весьма общий подход к интегрированию рациональных выражений от тригонометрических функций.

5.2. Интегралы вида $\int \sin^n x \cos^m x dx$

5.2.1. Интегралы вида $\int \sin^n x dx$, $\int \cos^n x dx$ $(n \in \mathbb{N})$

Эти интегралы можно вычислять, последовательно понижая степень с помощью соответствующих формул:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x),\ \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x),$$

$$\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4},\ \cos^3 x = \frac{3\cos x + \cos 3x}{4},$$

$$\sin^4 x = \frac{3 - 4\cos 2x + \cos 4x}{8},\ \cos^4 x = \frac{3 + 4\cos 2x + \cos 4x}{8} \text{ и др.}$$

Интегрированием по частям можно вывести общие формулы понижения степени для интегралов данного вида (см. пример 5.15).

Пример 5.11. Найти $\int \sin^3 x dx$.

Решение. Вычисляем:

$$\int \sin^3 x dx = \frac{1}{4}\int (3\sin x - \sin 3x)dx = -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{3}\cos 3x + C.$$

Можно было интегрировать иначе:

$$\int (1-\cos^2 x)\sin x dx = -\int (1-\cos^2 x)d(\cos x) = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C.$$

Пример 5.12. Найти $\int \sin^4 x dx$.

Решение. Вычисляем:

$$\int \sin^4 x dx = \frac{1}{8}\int (3 - 4\cos 2x + \cos 4x)dx =$$

$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

Если формулы понижения степени нет под рукой, ее легко можно вывести или интегрировать постепенно:

$$\int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (3 - 4\cos 2x + \cos 4x)dx$$

и т.д.

Пример 5.13. Найти $\int \cos^5 x dx$.

Решение. Вычисляем:

$$\int \cos^5 x dx = \int (1-\sin^2 x)^2 \cos x dx = \int (1-t^2)^2 dt = \int (1 - 2t^2 + t^4)dt =$$

$$= t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + C = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C.$$

Пример 5.14. Найти $\int \cos^6 x dx$.

Решение. Вычисляем:

$$\int (\cos^2 x)^3 dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^3 dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (1 + 3\cos 2x + 3\cos^2 2x + \cos^3 2x)dx =$$

$$=\frac{x}{8}+\frac{3}{16}\sin 2x+\frac{3}{8}\int\frac{1+\cos 4x}{2}dx+\frac{1}{8}\int(1-\sin^2 2x)\cos 2xdx=$$

$$=\frac{x}{8}+\frac{3}{16}\sin 2x+\frac{3x}{16}+\frac{3}{64}\sin 2x+\frac{1}{8}\int\cos 2xdx-\frac{1}{16}\int\sin^2 2xd(\sin 2x)=$$

$$=\frac{5x}{16}+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x-\frac{1}{48}\sin^3 2x+C.$$

Пример 5.15. Вывести формулу понижения для интегралов $I_n = \int\sin^n xdx$ ($n \in \mathbb{N}$, $n > 2$).

Решение. В этом примере эффекта понижения степени удается добиться путем интегрирования по частям:

$$I_n=-\int\sin^{n-1}xd\cos x=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)\int\sin^{n-2}x\cos^2 xdx=$$

$$=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n,$$

откуда $I_n = \dfrac{1}{n}[(n-1)I_{n-2}-\cos x\sin^{n-1}x]$, $n = 3, 4, 5, \ldots$.

5.2.2. Случай, когда *n* и *m* — натуральные четные числа

Если оба показателя n и m — положительные четные числа, то, как и в предыдущем подпараграфе, применяются формулы понижения для 2-й, 3-й, 4-й и т.д. степеней:

$$\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x,\ \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x),\ \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x).$$

Пример 5.16. Найти $\int\sin^2 x\cos^4 xdx$.

Решение. Вычисляем:

$$\frac{1}{4}\int\cos^2 x\sin^2 2xdx=\frac{1}{4}\int\frac{1+\cos 2x}{2}\cdot\frac{1-\cos 4x}{2}dx=$$

$$=\frac{1}{16}\int(1+\cos 2x-\cos 4x-\cos 2x\cos 4x)dx=$$

$$=\frac{x}{16}+\frac{\sin 2x}{32}-\frac{\sin 4x}{64}-\frac{1}{32}\int(\cos 2x+\cos 6x)dx=$$

$$=\frac{x}{16}+\frac{\sin 2x}{32}-\frac{\sin 4x}{64}-\frac{\sin 2x}{64}-\frac{\sin 6x}{192}+C=$$

$$=\frac{x}{16}+\frac{\sin 2x}{64}-\frac{\sin 4x}{64}-\frac{\sin 6x}{192}+C.$$

Пример 5.17. Найти $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$.

Решение. Вычисляем:

$$\int \sin^4 x \cos^2 x dx = \int (\sin x \cos x)^2 \sin^2 x dx =$$
$$= \int \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x(1-\cos 2x)dx =$$
$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx - \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x dx =$$
$$= \frac{1}{16}\int (1-\cos 4x) dx - \frac{1}{16}\int \sin^2 2x d(\sin 2x) =$$
$$= \frac{x}{16} - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$

5.2.3. Случай, когда *n* или *m* — натуральное нечетное число

Если хотя бы один из показателей n или m — натуральное нечетное число, то рекомендуемая подстановка $t = \sin x$ (если натуральное нечетное — m) или $t = \cos x$ (если натуральное нечетное — n). При этом используются формулы $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, а также формулы понижения степени

$$\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4},\ \cos^3 x = \frac{3\cos x + \cos 3x}{4} \text{ и др.}$$

Пример 5.18. Найти $\int \sin^3 x dx$.

Решение. Вычисляем:

$$\int \sin^3 x dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x dx = -\int (1-\cos^2 x) d(\cos x) =$$
$$= \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C.$$

Пример 5.19. Найти $\int \sin^5 x \cos^4 x dx$.

Решение. Вычисляем:

$$\int \sin^5 x \cos^4 x dx = -\int \sin^4 x \cos^4 x d(\cos x) =$$
$$= -\int (1-\cos^2 x)^2 \cos^4 x d(\cos x) = -\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{2}{7}\cos^7 x - \frac{1}{9}\cos^9 x + C.$$

Пример 5.20. Найти $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x \cdot \sqrt[3]{\cos x}} dx$.

Решение. Приведем интеграл к виду $\int \sin^3 x \cos^{-\frac{4}{3}} x dx$ и сделаем подстановку $t = \cos x$:

$$-\int (1-t^2) t^{-\frac{4}{3}} dt = \int (t^{\frac{2}{3}} - t^{-\frac{4}{3}}) dt = \frac{3}{5} t^{\frac{5}{3}} + 3t^{-\frac{1}{3}} + C =$$

$$= \frac{3}{5}\sqrt[3]{\cos^5 x} + \frac{3}{\sqrt[3]{\cos x}} + C$$

$(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z})$.

5.2.4. Случай, когда *n* и *m* — целые отрицательные числа одной четности

Если n и m — целые отрицательные числа одной четности (оба одновременно четны либо оба нечетны), то полагают $t = \mathrm{tg}\, x$ (или $t = \mathrm{ctg}\, x$) и применяют формулы $1 + \mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$, $1 + \mathrm{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Также бывает иногда полезно понизить степени в знаменателе, представляя единицу в числителе дроби как тригонометрическую единицу (или ее степень).

Пример 5.21. Найти $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}$.

Решение. Вычисляем:

$$\int \frac{dx}{\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}\cos^2 x \cos^6 x} = \int \frac{d\,\mathrm{tg}\, x}{\mathrm{tg}^3 x \frac{1}{(1+\mathrm{tg}^2 x)^3}} = \int \frac{(1+\mathrm{tg}^2 x)^3 d\,\mathrm{tg}\, x}{\mathrm{tg}^3 x} =$$

$$= \int \frac{(1+u^2)^3 du}{u^3} = \int \left(\frac{1}{u^3} + \frac{3}{u} + 3u + u^3 \right) du =$$

$$= -\frac{1}{2u^2} + 3\ln|u| + \frac{3}{2}u^2 + \frac{1}{4}u^4 + C =$$

$$= -\frac{1}{2\,\mathrm{tg}^2 x} + 3\ln|\mathrm{tg}\, x| + \frac{3}{2}\mathrm{tg}^2 x + \frac{1}{4}\mathrm{tg}^4 x + C$$

$(x \neq \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z})$.

Пример 5.22. Найти $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

Решение. 1-й способ. Вычисляем:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} =$$
$$= \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C$$

$(x \neq \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z})$.

2-й способ. В данном случае можно было поступить иначе:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{4dx}{\sin^2 2x} = 2\int \frac{d(2x)}{\sin^2 2x} = -2\operatorname{ctg} 2x + C.$$

5.2.5. Интегралы вида $\int \frac{dx}{\sin^n x}, \int \frac{dx}{\cos^n x}$ $(n \in \mathbb{N})$

Случай $n = 1$ будет рассмотрен в примере 5.23. При $n = 2$ это известные табличные интегралы $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$, $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$. При $n > 2$ интегралы такого вида сводятся к интегралам, рассмотренным в подпараграфе 5.2.4. В самом деле,

$$\int \frac{dx}{\sin^n x} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{2^{n-1} \sin^n \frac{x}{2} \cos^n \frac{x}{2}} = \frac{1}{2^{n-1}} \int \frac{du}{\sin^n u \cos^n u}.$$

В свою очередь,

$$\int \frac{dx}{\cos^n x} = \int \frac{d\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin^n \left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \int \frac{du}{\sin^n u}.$$

Иногда они вычисляются с помощью формул $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ и $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \operatorname{ctg}^2 x$.

Интегралы от нечетной натуральной степени секанса или косеканса проще всего находятся по рекуррентным формулам понижения:

$$\int \frac{dx}{\cos^{2n+1} x} = \frac{1}{2n} \cdot \frac{\sin x}{\cos^{2n} x} + \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \int \frac{dx}{\cos^{2n-1} x}; \tag{5.1}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^{2n+1} x} = -\frac{1}{2n} \cdot \frac{\cos x}{\sin^{2n} x} + \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \int \frac{dx}{\sin^{2n-1} x}. \tag{5.2}$$

Пример 5.23. Найти: а) $\int \frac{dx}{\sin x}$; б) $\frac{dx}{\cos x}$.

Решение. а) При интегрировании функции $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$ (на промежутках между соседними точками серии $x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$, где косеканс определен) перейдем к тангенсу половинного аргумента:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\frac{x}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

С другой стороны, в этой же ситуации можно было домножить и одновременно разделить выражение $\frac{1}{\sin x}$ на $\sin x$ и перейти к дифференциалу от $\cos x$:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x dx}{\sin^2 x} = \int \frac{-d(\cos x)}{1 - \cos^2 x} = \int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x - 1} = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + C.$$

б) Умножением и одновременным делением подынтегрального выражения на $\cos x$ можно вычислить и интеграл от секанса:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x dx}{\cos^2 x} = \int \frac{d(\sin x)}{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{\sin x + 1}{\sin x - 1}\right| + C.$$

С другой стороны, при вычислении последнего интеграла можно было прибегнуть к введению вспомогательного аргумента $\frac{\pi}{4}$ и свести к предыдущему интегралу от косеканса ($\cos x \neq 0$):

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \int \frac{d\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

Пример 5.24. Найти $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$.

Решение. Вычисляем:

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x} = -\int \frac{1}{\sin^2 x} d(\operatorname{ctg} x) = -\int (1 + \operatorname{ctg}^2 x) d(\operatorname{ctg} x) =$$
$$= -\operatorname{ctg} x - \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x + C$$

$(x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z})$.

Пример 5.25. Найти $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$.

Решение. Вычисляем:

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} d(\operatorname{tg} x) = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) d(\operatorname{tg} x) = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C$$

$(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z})$.

Пример 5.26. Найти $\int \frac{dx}{\sin^5 x}$.

Решение. Применяя рекуррентную формулу (5.2) при $n = 2$, получим

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{\cos x}{\sin^4 x} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{\sin^3 x}.$$

Полагая теперь $n = 1$, по той же формуле имеем

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin x}.$$

Так как $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$, то

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C,$$

а

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x} = -\frac{\cos x}{4\sin^4 x} - \frac{3\cos x}{8\sin^2 x} + \frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$$

$(x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z})$.

Пример 5.27. Найти $\int \frac{dx}{\cos^5 x}$.

Решение. При $\cos x \neq 0$ имеем

$$\int \frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin^5\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{16}\int \frac{d\left(\frac{u}{2}\right)}{\sin^5\frac{u}{2}\cos^5\frac{u}{2}} = \frac{1}{16}\int \frac{d\,\mathrm{tg}\frac{u}{2}}{\frac{\sin^5\frac{u}{2}}{\cos^5\frac{u}{2}}\cdot\cos^8\frac{u}{2}} =$$

$$= \frac{1}{16}\int \frac{\left(1+\mathrm{tg}^2\frac{u}{2}\right)^4}{\mathrm{tg}^5\frac{u}{2}}d\,\mathrm{tg}\frac{u}{2} = \frac{1}{16}\int \frac{(1+z^2)^4}{z^5}dz =$$

$$= \frac{1}{16}\int \frac{1+4z^2+6z^4+4z^6+z^8}{z^5}dz =$$

$$= -\frac{1}{64}z^{-4} - \frac{1}{8}z^{-2} + \frac{3}{8}\ln|z| + \frac{1}{8}z^2 + \frac{1}{64}z^4 + C =$$

$$= \frac{\sin x}{4\cos^4 x} + \frac{3\sin x}{8\cos^2 x} + \frac{3}{8}\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

5.2.6. Случай, когда n и m — целые отрицательные числа, причем одно из них нечетное

Если n и m — целые отрицательные числа, причем одно из них нечетное, то полагают $t = \sin x$ (если m — натуральное нечетное) или $t = \cos x$ (если n — натуральное нечетное). Иногда в случае больших степеней n и m с целью понижения этих степеней полезно в числителе подынтегральной функции неоднократно заменить единицу суммой $\sin^2 x + \cos^2 x$ или даже ее степенью.

Пример 5.28. Найти $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^4 x}$.

Решение. Вычисляем:

$$\int \frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)^2}{\sin^3 x\cos^4 x}dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos^4 x} + 2\int \frac{dx}{\sin x\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^3 x} =$$

$$= \frac{1}{3\cos^3 x} + 2\int \frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)dx}{\sin x\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^3 x} =$$

$$=\frac{1}{3\cos^3 x}+2\left(\frac{1}{\cos x}+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|\right)+\left(-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|\right)+C=$$

$$=\frac{1}{3\cos^3 x}+\frac{2}{\cos x}-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{5}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$$

$(x \neq \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z})$.

5.2.7. Случай, когда один из показателей четный, а другой — целый отрицательный

Если n — четное число, а m — целое отрицательное число, то можно заменить $\sin^2 x$ по формуле $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, и в этом случае интеграл сводится к интегралу вида $\int \frac{dx}{\cos^n x}$ $(n \in \mathbb{N})$. В случае четного m и целого отрицательного n аналогично заменяют $\cos^2 x$ на $1 - \sin^2 x$. Если оба показателя n и m четны, то полагают $t = \operatorname{tg} x$. Если оба показателя степени отрицательны, то с целью понижения этих степеней иногда рекомендуется заменить единицу в числителе подынтегральной функции суммой $\sin^2 x + \cos^2 x$ или ее степенью.

Пример 5.29. Найти $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}dx$.

Решение. Вычисляем:

$$\int\frac{(1-\cos^2 x)^2}{\cos^5 x}dx=\int\frac{dx}{\cos^5 x}-2\int\frac{dx}{\cos^3 x}+\int\frac{dx}{\cos x}=$$

$$=\frac{\sin x}{4\cos^4 x}-\frac{5\sin x}{8\cos^2 x}+\frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$$

$(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z})$.

Пример 5.30. Найти $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx$.

Решение. Полагая $t = \operatorname{tg} x$, находим

$$\int\frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\frac{dx}{\cos^2 x}=\int t^2(t^2+1)dt=\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}+C=\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5}+\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}+C$$

$(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z})$.

Пример 5.31. Найти $\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x}$.

Решение. Вычисляем:

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x} = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin x} - \int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x} =$$
$$= \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{\cos x} + C$$

$(x \neq \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z})$.

5.2.8. Случай, когда один из показателей нечетный, а другой — целый отрицательный

Если n — нечетное число, а m — целое отрицательное число, то полагают $t = \cos x$ и применяют формулу $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. В случае, когда m — нечетное, а n — целое отрицательное число, полагают $t = \sin x$ и применяют формулу $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.

Пример 5.32. Найти $\int \frac{\sin^7 x}{\cos^2 x} dx$.

Решение. Вычисляем:

$$-\int \frac{\sin^6 x d\cos x}{\cos^2 x} = -\int \frac{(1-\cos^2 x)^3 d\cos x}{\cos^2 x} = -\int \frac{1-3u^2+3u^4-u^6}{u^2} du =$$
$$= \frac{1}{u} + 3u - u^3 + \frac{1}{5}u^5 + C = \frac{1}{\cos x} + 3\cos x - \cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + C$$

$(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z})$.

5.3. Интегралы вида $\int \sin ax \cos bx dx$, $\int \sin ax \sin bx dx$, $\int \cos ax \cos bx dx$, а также $\int \sin ax \cdot \sin bx \cdot \sin cx dx$ и другие

Эти интегралы находятся с помощью тригонометрических формул преобразования произведений синусов и косинусов в суммы (разности):

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\cdot[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)],$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}\cdot[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)],$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\cdot[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)].$$

Пример 5.33. Найти $\int \sin 5x\cos 3x dx$.
Решение. Вычисляем:

$$\frac{1}{2}\int(\sin 8x+\sin 2x)dx = -\frac{1}{16}\cos 8x-\frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

Пример 5.34. Найти $\int \sin 7x\cos 3x dx$.
Решение. Вычисляем:

$$\frac{1}{2}\int(\cos 4x-\cos 10x)dx = \frac{1}{8}\sin 4x-\frac{1}{20}\sin 10x + C.$$

Пример 5.35. Найти $\int \cos 3x\cos x dx$.
Решение. Вычисляем:

$$\frac{1}{2}\int(\cos 4x+\cos 2x)dx = \frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

Пример 5.36. Найти $\int \sin x\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{3}dx$.

Решение. Имеем

$$\frac{1}{2}\int\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\right)\cdot\sin\frac{x}{3}dx =$$
$$=\frac{1}{4}\int\left(-\sin\frac{x}{6}+\sin\frac{5x}{6}+\sin\frac{7x}{6}-\sin\frac{11x}{6}\right)dx =$$
$$=\frac{3}{2}\cos\frac{x}{6}-\frac{3}{10}\cos\frac{5x}{6}-\frac{3}{14}\cos\frac{7x}{6}+\frac{3}{32}\cos\frac{11x}{6}+C.$$

5.4. Интегралы вида $\int \mathrm{tg}^n x dx$, $\int \mathrm{ctg}^n x dx$ $(n\in\mathbb{N})$

Случаи $n = 1$ и $n = 2$ рассмотрены ниже в примерах 5.37 и 5.38. При $n > 2$ указанные интегралы вычисляются с помощью формул $\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1$ и $\operatorname{ctg}^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x} - 1$, которые последовательно понижают степень тангенса или котангенса.

Пример 5.37. Найти $\int \operatorname{tg} x dx$.

Решение. Вычисляем:

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$$

Пример 5.38. Найти $\int \operatorname{tg}^2 x dx$.

Решение. Вычисляем:

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

$(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z})$.

Пример 5.39. Найти $\int \operatorname{tg}^7 x dx$.

Решение. Вычисляем:

$$\int \operatorname{tg}^5 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \operatorname{tg}^5 x d \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg}^5 x dx =$$

$$= \frac{1}{6} \operatorname{tg}^6 x - \int \operatorname{tg}^3 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \frac{1}{6} \operatorname{tg}^6 x - \int \operatorname{tg}^3 x d \operatorname{tg} x + \int \operatorname{tg}^3 x dx =$$

$$= \frac{1}{6} \operatorname{tg}^6 x - \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x + \int \operatorname{tg} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx =$$

$$= \frac{1}{6} \operatorname{tg}^6 x - \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x + \int \operatorname{tg} x d \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x dx = \frac{1}{6} \operatorname{tg}^6 x - \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x +$$

$$+ \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \int \frac{d \cos x}{\cos x} = \frac{1}{6} \operatorname{tg}^6 x - \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln|\cos x| + C$$

$(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z})$.

5.5. Интегралы вида $\int \operatorname{tg}^n x \cdot \dfrac{dx}{\cos^m x}$, $\int \operatorname{ctg}^n x \cdot \dfrac{dx}{\sin^m x}$, где $n \in \mathbb{R}$, m — четное натуральное число

Такие интегралы находятся аналогично рассмотренным в предыдущем подпараграфе с помощью формул $\dfrac{1}{\cos^2 x} =$

$= 1 + \operatorname{tg}^2 x$ и $\dfrac{1}{\sin^2 x} = 1 + \operatorname{ctg}^2 x$ с последующей заменой $t = \operatorname{tg} x$ или, соответственно, $t = \operatorname{ctg} x$.

Пример 5.40. Найти $\int \operatorname{tg}^4 x \cdot \dfrac{dx}{\cos^6 x}$.

Решение. Вычисляем:

$$\int \operatorname{tg}^4 x \cdot \frac{dx}{\cos^6 x} = \int \operatorname{tg}^4 x \cdot \left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 d(\operatorname{tg} x) = \int \operatorname{tg}^4 x \cdot \left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 d(\operatorname{tg} x) =$$
$$= \int \operatorname{tg}^4 x (1 + \operatorname{tg}^2 x)^2 d(\operatorname{tg} x) =$$
$$= \int \operatorname{tg}^4 x d(\operatorname{tg} x) + 2\int \operatorname{tg}^6 x d(\operatorname{tg} x) + \int \operatorname{tg}^8 x d(\operatorname{tg} x) =$$
$$= \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x + \frac{2}{7}\operatorname{tg}^7 x + \frac{1}{9}\operatorname{tg}^9 x + C$$

$(x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z})$.

5.6. Интегралы вида $\displaystyle\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}, \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c}$

1. При вычислении интегралов вида $\displaystyle\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}$ можно было бы сделать универсальную подстановку $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$. Однако проще сначала преобразовать подынтегральную функцию методом введения вспомогательного аргумента:

$$\frac{1}{a \sin x + b \cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi)},$$

где $\sin \varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\cos \varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, и положить далее $t = \operatorname{tg}\dfrac{x + \varphi}{2}$. Тогда $dx = \dfrac{2dt}{1 + t^2}$, $\sin(x + \varphi) = \dfrac{2t}{1 + t^2}$ и, следовательно, приходим к интегралу

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \ln|t| + C = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x + \varphi}{2}\right| + C.$$

2. Интегралы вида $\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c}$ вычисляются универсальной подстановкой $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Тогда $x = 2\operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos t = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ и интеграл сводится к интегралу от рациональной функции.

Пример 5.41. Найти $\int \frac{dx}{3\sin x + \cos x}$.

Решение. 1-й способ. Имеем $\int \frac{dx}{3\sin x+\cos x} = \int \frac{dx}{\sqrt{10}\sin(x+\varphi)}$, где $\varphi = \arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}$. Положим $t = \operatorname{tg}\frac{x+\varphi}{2}$, тогда $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\sin(x+\varphi) = \frac{2t}{1+t^2}$ и, следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{10}}\int\frac{dx}{\sin(x+\varphi)} = \frac{1}{\sqrt{10}}\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}\int\frac{dt}{t} = \frac{1}{\sqrt{10}}\ln|t| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x+\varphi}{2}\right| + C,$$

где $\varphi = \arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}$ $(\sin(x+\varphi) \neq 0)$.

2-й способ. Вычисляем:

$$\int\frac{dx}{3\sin x+\cos x} = \int\frac{dx}{6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}} =$$

$$= \int\frac{dx}{\left(6\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)\cos^2\frac{x}{2}} = -2\int\frac{d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-6\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1} =$$

$$= -2\int\frac{dt}{(t-3)^2-10} = -\frac{1}{\sqrt{10}}\ln\left|\frac{t-3-\sqrt{10}}{t-3+\sqrt{10}}\right| + C =$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{10}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3-\sqrt{10}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3+\sqrt{10}}\right|+C$$

$\left(\cos\frac{x}{2}\neq 0\right)$.

Пример 5.42. Найти $\int\frac{dx}{\sin x+1}$.

Решение. Помимо метода универсальной подстановки, этот интеграл можно также вычислить следующим образом:

$$\int\frac{dx}{\sin x+1}=-\int\frac{d\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=-\int\frac{d\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}=-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)+C$$

$\left(x\neq-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\right)$.

Пример 5.43. Найти $\int\frac{dx}{3+\sin x+\cos x}$.

Решение. Применив универсальную подстановку $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, придем к интегралу

$$\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{t^2+t+2}=\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{7}}+C=\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{7}}+C$$

$(x\neq\pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z})$.

5.7. Интегралы вида $\int\frac{dx}{a\sin^2x+b\sin x\cos x+c\cos^2x}$

Для вычисления интеграла ($ac\neq 0$) перейдем в нем к $d(\operatorname{tg}x)$:

$$\int \frac{dx}{a\sin^2 x + b\sin x \cdot \cos x + c\cos^2 x} = \int \frac{dx}{(a\,\mathrm{tg}^2 x + b\,\mathrm{tg}\,x + c)\cos^2 x} =$$
$$= \int \frac{d(\mathrm{tg}\,x)}{a\,\mathrm{tg}^2 x + b\,\mathrm{tg}\,x + c} = \int \frac{dt}{at^2 + bt + c},$$

где $t = \mathrm{tg}\,x$. Таким образом, получили интеграл, вычисление которого рассматривалось в параграфе 3.2.

Пример 5.44. Найти $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x}$.

Решение. Вычисляем:

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x(\mathrm{tg}^2 x + 2\,\mathrm{tg}\,x - 1)} = \int \frac{d\,\mathrm{tg}\,x}{\mathrm{tg}^2 x + 2\,\mathrm{tg}\,x - 1} =$$
$$= \int \frac{d(\mathrm{tg}\,x + 1)}{(\mathrm{tg}\,x + 1)^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\mathrm{tg}\,x + 1 - \sqrt{2}}{\mathrm{tg}\,x + 1 + \sqrt{2}}\right| + C$$

$(\mathrm{tg}\,x \neq -1 \pm \sqrt{2})$.

5.8. Интегралы вида $\int \frac{dx}{\sin(x + a)\sin(x + b)}$, $\int \frac{dx}{\cos(x + a)\cos(x + b)}$, а также $\int \frac{dx}{\sin(x + a)\cos(x + b)}$ $(a \neq b)$

Для вычисления интеграла $\int \frac{dx}{\sin(x + a)\sin(x + b)}$ используется искусственный прием умножения и одновременного деления подынтегральной функции на одно и то же выражение $\sin(a - b)$ с последующим разбиением интеграла на разность двух интегралов $(\sin(x + a)\sin(x + b) \neq 0)$:

$$\int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)} = \frac{1}{\sin(a-b)} \int \frac{\sin[(x+a)-(x+b)]}{\sin(x+a)\sin(x+b)}\,dx =$$
$$= \frac{1}{\sin(a-b)} \int \frac{\sin(x+a)\cos(x+b) - \cos(x+a)\sin(x+b)}{\sin(x+a)\sin(x+b)}\,dx =$$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\left(\int\frac{\cos(x+b)}{\sin(x+b)}dx-\int\frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\ln\left|\frac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)}\right|+C.$$

Аналогично вычисляется интеграл с косинусами:

$$\int\frac{dx}{\cos(x+a)\cos(x+b)}=\frac{1}{\sin(a-b)}\int\frac{\sin\left[(x+a)-(x+b)\right]}{\cos(x+a)\cos(x+b)}dx=$$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\int\frac{\sin(x+a)\cos(x+b)-\cos(x+a)\sin(x+b)}{\cos(x+a)\cos(x+b)}dx=$$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\left(\int\frac{\sin(x+a)}{\cos(x+a)}dx-\int\frac{\sin(x+b)}{\cos(x+b)}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\left(-\int\frac{d(\cos(x+a))}{\cos(x+a)}+\int\frac{d(\cos(x+b))}{\cos(x+b)}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\ln\left|\frac{\cos(x+b)}{\cos(x+a)}\right|+C.$$

Интегралы вида $\int\frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}$ с помощью формул приведения приводятся к одному из предыдущих видов, например:

$$\int\frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}=$$

$$=\int\frac{dx}{\sin(x+a)\sin\left(\frac{\pi}{2}-(x+b)\right)}=-\int\frac{dx}{\sin(x+a)\sin\left[x+\left(b-\frac{\pi}{2}\right)\right]}$$

и т.д.

Пример 5.45. Найти $\int\frac{dx}{\sin(x-1)\cos x}$.

Решение. Преобразуем интеграл согласно приведенной выше схеме и вычислим его ($\sin(x-1)\cdot\cos x\neq 0$):

$$\int\frac{dx}{\sin(x-1)\cos x}=\int\frac{dx}{\sin(x-1)\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=$$

$$=\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-1\right)}\int\frac{\sin\left[(x-1)+\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]}{\sin(x-1)\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}dx=$$

$$=\frac{1}{\cos 1}\int\frac{\sin(x-1)\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos(x-1)\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin(x-1)\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}dx=$$

$$=\frac{1}{\cos 1}\int\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}+\frac{\cos(x-1)}{\sin(x-1)}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{\cos 1}\int\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos(x-1)}{\sin(x-1)}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{\cos 1}\left(\int\frac{-d(\cos x)}{\cos x}+\int\frac{d(\sin(x-1))}{\sin(x-1)}\right)=$$

$$=\frac{1}{\cos 1}\left(-\ln|\cos x|+\ln|\sin(x-1)|\right)+C=\frac{1}{\cos 1}\ln\left|\frac{\sin(x-1)}{\cos x}\right|+C.$$

5.9. Интегралы вида

$$\int\frac{dx}{\sin x-\sin a},\ \int\frac{dx}{\cos x-\cos a},\ \int\frac{dx}{\sin x-\cos a}$$

При вычислении интеграла $\int\frac{dx}{\sin x-\sin a}$ умножим и разделим подынтегральную функцию на $\cos a$ и затем воспользуемся тождествами $\sin x-\sin a=2\sin\frac{x-a}{2}\cdot\cos\frac{x+a}{2}$ и $\cos a=$ $=\cos\left(\frac{x-a}{2}-\frac{x+a}{2}\right)$:

$$\int\frac{dx}{\sin x-\sin a}=\frac{1}{2\cos a}\int\frac{\cos\left(\frac{x-a}{2}-\frac{x+a}{2}\right)}{\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}dx=$$

$$=\frac{1}{2\cos a}\int\frac{\cos\frac{x-a}{2}\cdot\cos\frac{x+a}{2}+\sin\frac{x-a}{2}\cdot\sin\frac{x+a}{2}}{\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}dx=$$

$$=\frac{1}{2\cos a}\int\left(\frac{\cos\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{x-a}{2}}+\frac{\sin\frac{x+a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{\cos a}\cdot\left(\int\frac{d\left(\sin\frac{x-a}{2}\right)}{\sin\frac{x-a}{2}}-\int\frac{d\left(\cos\frac{x+a}{2}\right)}{\cos\frac{x+a}{2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{\cos a}\cdot\left(\ln\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|-\ln\left|\cos\frac{x+a}{2}\right|\right)+C=\frac{1}{\cos a}\ln\left|\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}}\right|+C$$

$(\cos a\neq 0,\ \sin x\neq\sin a)$.

При вычислении интеграла $\int\frac{dx}{\cos x-\cos a}$ поступаем аналогично: умножим и разделим подынтегральную функцию на $\sin a$ и затем воспользуемся тождествами $\cos x-\cos a=$ $=-2\sin\frac{x-a}{2}\cdot\sin\frac{x+a}{2}$ и $\sin a=\sin\left(\frac{x-a}{2}-\frac{x+a}{2}\right)$:

$$\int\frac{dx}{\cos x-\cos a}=-\frac{1}{2\sin a}\int\frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}-\frac{x+a}{2}\right)}{\sin\frac{x-a}{2}\sin\frac{x+a}{2}}dx=$$

$$=-\frac{1}{2\sin a}\int\frac{\sin\frac{x-a}{2}\cdot\cos\frac{x+a}{2}-\cos\frac{x-a}{2}\cdot\sin\frac{x+a}{2}}{\sin\frac{x-a}{2}\cdot\sin\frac{x+a}{2}}dx=$$

$$=-\frac{1}{2\sin a}\int\left(\frac{\cos\frac{x+a}{2}}{\sin\frac{x+a}{2}}-\frac{\cos\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{x-a}{2}}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{\sin a}\cdot\left(\int\frac{d\left(\sin\frac{x-a}{2}\right)}{\sin\frac{x-a}{2}}-\int\frac{d\left(\sin\frac{x+a}{2}\right)}{\sin\frac{x+a}{2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sin a}\cdot\left(\ln\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|-\ln\left|\sin\frac{x+a}{2}\right|\right)+C=\frac{1}{\sin a}\ln\left|\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{x+a}{2}}\right|+C$$

($\sin a\neq 0$, $\cos x\neq\cos a$).

Случай $\int\frac{dx}{\sin x-\cos a}$ приводится к одному из двух рассмотренных выше при помощи формул приведения

$$\int\frac{dx}{\sin x-\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)}\text{ или }\int\frac{dx}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos a}.$$

Пример 5.46. Найти $\int\frac{dx}{\sin x-\sin 5}$.

Решение. Имеем

$$\int\frac{dx}{\sin x-\sin 5}=\frac{1}{2\cos 5}\int\frac{\cos\left(\frac{x-5}{2}-\frac{x+5}{2}\right)}{\sin\frac{x-5}{2}\cos\frac{x+5}{2}}dx=$$

$$=\frac{1}{2\cos 5}\int\frac{\cos\frac{x-5}{2}\cos\frac{x+5}{2}+\sin\frac{x-5}{2}\sin\frac{x+5}{2}}{\sin\frac{x-5}{2}\cos\frac{x+5}{2}}dx=$$

$$=\frac{1}{2\cos 5}\int\left(\frac{\cos\frac{x-5}{2}}{\sin\frac{x-5}{2}}+\frac{\sin\frac{x+5}{2}}{\cos\frac{x+5}{2}}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{\cos 5}\left(\int\frac{d\left(\sin\frac{x-5}{2}\right)}{\sin\frac{x-5}{2}}-\int\frac{d\left(\cos\frac{x+5}{2}\right)}{\cos\frac{x+5}{2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{\cos 5}\left(\ln\left|\sin\frac{x-5}{2}\right|-\ln\left|\cos\frac{x+5}{2}\right|\right)+C=\frac{1}{\cos 5}\ln\left|\frac{\sin\frac{x-5}{2}}{\cos\frac{x+5}{2}}\right|+C.$$

5.10. Интегралы вида

$$\int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x}{a\sin x + b\cos x}dx,\ \int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x + c_1}{a\sin x + b\cos x + c}dx,$$

$$\int \frac{a_1\sin^2 x + 2b_1\sin x\cos x + c_1\cos^2 x}{a\sin x + b\cos x}dx$$

1. При вычислении интегралов вида $\int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x}{a\sin x + b\cos x}dx$ представим числитель $(a_1\sin x + b_1\cos x)$ в виде линейной комбинации знаменателя $(a\sin x + b\cos x)$ и его производной $(a\cos x - b\sin x)$:

$$a_1\sin x + b_1\cos x = A(a\sin x + b\cos x) + B(a\cos x - b\sin x),$$

где A и B — постоянные. Найдем A и B методом неопределенных коэффициентов. Два линейных тригонометрических многочлена относительно функций $\sin x$ и $\cos x$ тождественно равны тогда и только тогда, когда равны их коэффициенты при $\sin x$ и $\cos x$. Поэтому для нахождения коэффициентов имеем систему

$$\begin{cases} a_1 = Aa - Bb, \\ b_1 = Ab + Ba, \end{cases}$$

откуда определяем

$$\begin{cases} A = \dfrac{a_1a + b_1b}{a^2 + b^2}, \\ B = \dfrac{ab_1 - a_1b}{a^2 + b^2}. \end{cases}$$

Подставляя полученное разложение под знак интеграла, находим $(a\sin x + b\cos x \neq 0)$:

$$\int \frac{A(a\sin x + b\cos x) + B(a\cos x - b\sin x)}{a\sin x + b\cos x}dx =$$

$$= Ax + B\int \frac{(a\cos x - b\sin x)dx}{a\sin x + b\cos x} =$$

$$= Ax + B\int \frac{d(a\sin x + b\cos x)}{a\sin x + b\cos x} = Ax + B\ln|a\sin x + b\cos x| + C.$$

Пример 5.47. Найти $\int \frac{\sin x - 3\cos x}{4\sin x + 5\cos x}dx$.

Решение. Представим числитель в подынтегральной дроби в виде

$$\sin x - 3\cos x = A(4\sin x + 5\cos x) + B(4\cos x - 5\sin x).$$

Отсюда имеем систему

$$\begin{cases} 1 = 4A - 5B, \\ -3 = 5A + 4B, \end{cases}$$

из которой находим

$$\begin{cases} A = -\frac{11}{41}, \\ B = -\frac{17}{41}. \end{cases}$$

Подставляя найденные коэффициенты, получим

$$\int \frac{\sin x - 3\cos x}{4\sin x + 5\cos x}dx = -\frac{11}{41}\int dx - \frac{17}{41}\int \frac{d(4\sin x + 5\cos x)}{4\sin x + 5\cos x} =$$
$$= -\frac{11}{41}x - \frac{17}{41}\ln|4\sin x + 5\cos x| + C.$$

2. Аналогичный подход используется и при вычислении интегралов вида $\int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x + c_1}{a\sin x + b\cos x + c}dx$. А именно, представим числитель дроби в виде

$$a_1\sin x + b_1\cos x + c_1 = A(a\sin x + b\cos x + c) +$$
$$+ B(a\cos x - b\sin x) + C,$$

откуда, приравнивая коэффициенты при $\sin x$, $\cos x$ и свободные члены, находим

$$A = \frac{a_1 a + b_1 b}{a^2 + b^2}, B = \frac{ab_1 - ba_1}{a^2 + b^2}, C = c_1 - Ac.$$

Подставляя в интеграл, окончательно получаем

$$\int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x + c_1}{a\sin x + b\cos x + c}dx = Ax + B\ln|a\sin x + b\cos x + c| +$$
$$+ C\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c},$$

где последний интеграл вычисляется универсальной подстановкой $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ $((2n-1)\pi < x < (2n+1)\pi,\ n \in \mathbb{Z})$.

Пример 5.48. Найти $\int \frac{2\sin x + \cos x - 1}{\sin x - \cos x + 2} dx$.

Решение. Представим числитель $(2\sin x + \cos x - 1)$ в виде линейной комбинации знаменателя $(\sin x - \cos x + 2)$, его производной $(\cos x + \sin x)$ и константы:

$$2\sin x + \cos x - 1 = A(\sin x - \cos x + 2) + B(\cos x + \sin x) + C.$$

Для нахождения коэффициентов A, B и C получаем систему

$$\begin{cases} 2 = A + B, \\ 1 = -A + B, \\ -1 = 2A + C, \end{cases}$$

откуда $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{3}{2}$, $C = -2$.

Поэтому имеем

$$\int \frac{2\sin x + \cos x - 1}{\sin x - \cos x + 2} dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{3}{2}\int \frac{\cos x + \sin x}{\sin x - \cos x + 2} dx -$$

$$-2\int \frac{dx}{\sin x - \cos x + 2} = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}\ln|\sin x - \cos x + 2| -$$

$$-2\int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} + 2\left(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right)} =$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{3}{2}\ln|\sin x - \cos x + 2| - 4\int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\frac{x}{2}\left(3\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 2\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1\right)} =$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{3}{2}\ln|\sin x - \cos x + 2| - 2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{2}} + C.$$

3. Этот же прием используется при вычислении интегралов вида

$$\int \frac{a_1\sin^2 x + 2b_1\sin x\cos x + c_1\cos^2 x}{a\sin x + b\cos x} dx.$$

Для этого запишем числитель дроби, стоящей под знаком интеграла, в виде следующей линейной комбинации:

$$a_1\sin^2 x + 2b_1\sin x\cos x + c_1\cos^2 x =$$
$$= (a\sin x + b\cos x)(A\cos x - B\sin x) + C(\sin^2 x + \cos^2 x),$$

откуда, приравнивая коэффициенты при $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ и $\sin x\cos$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} a_1 = -aB + C, \\ 2b_1 = aA - bB, \\ c_1 = Ab + C, \end{cases}$$

решая которую, находим

$$A = \frac{b(c_1 - a_1) + 2ab_1}{a^2 + b^2}, B = \frac{a(c_1 - a_1) - 2bb_1}{a^2 + b^2},$$
$$C = \frac{a_1 b^2 + c_1 a^2 - 2abb_1}{a^2 + b^2}.$$

Подставляя найденные коэффициенты в интеграл, получаем

$$\int \frac{a_1\sin^2 x + 2b_1\sin x\cos x + c_1\cos^2 x}{a\sin x + b\cos x}dx =$$
$$= A\sin x + B\cos x + C\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x},$$

где $a\sin x + b\cos x \neq 0$.

Пример 5.49. Найти $\int \frac{2\sin^2 x + 3\sin x\cos x + 5\cos^2 x}{\sin x - 2\cos x}dx$.

Решение. Представим числитель в виде

$$2\sin^2 x + 3\sin x\cos x + 5\cos^2 x =$$
$$= (A\cos x - B\sin x)(\sin x - 2\cos x) + C(\sin^2 x + \cos^2 x).$$

Для нахождения коэффициентов A, B и C имеем систему

$$\begin{cases} 2 = -B + C, \\ 3 = A + 2B, \\ 5 = -2A + C, \end{cases}$$

откуда $A = -\frac{3}{5}$, $B = \frac{9}{5}$, $C = \frac{19}{5}$.

Поэтому

$$\int \frac{2\sin^2 x+3\sin x\cos x+5\cos^2 x}{\sin x-2\cos x}dx=\frac{9}{5}\cos x-\frac{3}{5}\sin x+$$

$$+\frac{19}{5}\int \frac{dx}{\sin x-2\cos x}=\frac{9}{5}\cos x-\frac{3}{5}\sin x+\frac{19}{5}\int \frac{2d\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{2\,\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}+2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}-2}=$$

$$=\frac{9}{5}\cos x-\frac{3}{5}\sin x+\frac{19}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}\right|+C.$$

5.11. Интегрирование по частям

Часто в ситуациях, когда под знаком интеграла помимо тригонометрической функции находится функция другого типа (многочлен, логарифмическая или показательная функции и др.), для вычисления интеграла применяется метод интегрирования по частям.

Пример 5.50. Найти $\int \cos^2(\sqrt{x})dx$.

Решение. Положим $t=\sqrt{x}$, откуда $x=t^2$, $dx=2tdt$. Тогда

$$I=\int \cos^2(\sqrt{x})dx=2\int t\cos^2 tdt=\int t(1+\cos 2t)dt=\frac{t^2}{2}+\int t\cdot\cos tdt.$$

Последний интеграл вычисляется интегрированием по частям:

$$I=\frac{t^2}{2}+\int t\cdot\cos tdt=\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}t\sin 2t+\frac{1}{4}\cos 2t+C=$$
$$=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{x}\sin(2\sqrt{x})+\frac{1}{4}\cos(2\sqrt{x})+C$$

$(x\geqslant 0)$.

Пример 5.51. Найти $\int \frac{x\cos xdx}{\sin^3 x}$.

Решение. Вычисляем:

$$\int \frac{x\cos x dx}{\sin^3 x} = \int \frac{x d(\sin x)}{\sin^3 x} = \int x d\left(-\frac{1}{2\sin^2 x}\right) =$$

$$= -\frac{x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2}\operatorname{ctg} x + C$$

$(x \neq \pi n,\ n \in \mathbb{Z})$.

Пример 5.52. Найти $\int (2x^2 - 1)\cos 2x dx$.

Решение. Разобьем интеграл на два интеграла и проинтегрируем первый из них по частям:

$$\int (2x^2 - 1)\cos 2x dx = 2\int x^2 \cos 2x dx - \int \cos 2x dx =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\sin 2x \cdot x^2 - \frac{1}{2}\int \sin 2x \cdot 2x dx\right) - \frac{1}{2}\sin 2x =$$

$$= \sin 2x \cdot \left(x^2 - \frac{1}{2}\right) - 2\left(-\frac{x\cos 2x}{2} + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx\right) =$$

$$= \sin 2x \cdot \left(x^2 - \frac{1}{2}\right) + x\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x + C =$$

$$= \sin 2x \cdot (x^2 - 1) + x\cos 2x + C.$$

Пример 5.53. Найти $\int x \cdot \operatorname{tg}^2 x dx$.

Решение. Вычисляем:

$$\int x \cdot \operatorname{tg}^2 x dx = \int x d(\operatorname{tg} x - x) = x(\operatorname{tg} x - x) - \int (\operatorname{tg} x - x) dx =$$

$$= x \cdot \operatorname{tg} x - \frac{x^2}{2} + \ln|\cos x| + C$$

$\left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}\right)$.

Пример 5.54. Найти $\int x \cdot \operatorname{tg}^4 x dx$.

Решение. Проинтегрируем по частям, положив $u = x$, $dv = \operatorname{tg}^4 x dx$. В данном случае вид функции $v(x)$ не очевиден, поэтому, чтобы найти ее, вычислим отдельно вспомогательный интеграл:

$$\int \operatorname{tg}^4 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\operatorname{tg}^2 x dx = \int \operatorname{tg}^2 x d(\operatorname{tg} x) - \int \operatorname{tg}^2 x dx =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int dx = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C_1.$$

Возьмем в качестве $v(x) = \frac{\mathrm{tg}^3 x}{3} - \mathrm{tg}\, x + x$ и продолжим интегрирование:

$$\int x \cdot \mathrm{tg}^4 x dx = x\left(\frac{\mathrm{tg}^3 x}{3} - \mathrm{tg}\, x + x\right) - \int\left(\frac{\mathrm{tg}^3 x}{3} - \mathrm{tg}\, x + x\right) dx =$$

$$= x\left(\frac{\mathrm{tg}^3 x}{3} - \mathrm{tg}\, x + x\right) - \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\mathrm{tg}\, x dx - \int\frac{d(\cos x)}{\cos x} - \frac{x^2}{2} =$$

$$= x\left(\frac{\mathrm{tg}^3 x}{3} - \mathrm{tg}\, x\right) - \frac{1}{3}\int \mathrm{tg}\, x d(\mathrm{tg}\, x) - \frac{1}{3}\int\frac{d(\cos x)}{\cos x} - \int\frac{d(\cos x)}{\cos x} + \frac{x^2}{2} =$$

$$= x\left(\frac{\mathrm{tg}^3 x}{3} - \mathrm{tg}\, x\right) - \frac{\mathrm{tg}^2 x}{6} - \frac{4}{3}\ln|\cos x| + \frac{x^2}{2} + C$$

$(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z})$.

5.12. Другие подстановки и подходы к интегрированию

В заключение главы рассмотрим примеры интегрирования тригонометрических функций достаточно общего вида, не укладывающихся ни в одну из рассмотренных выше стандартных схем. Для них применяются все те же приемы: разнообразные подстановки и преобразования подынтегральной функции.

1. *Понижение степени*. Иногда, если это не нарушает рациональности подынтегрального выражения в интегралах вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$, полезно понизить степени $\sin x$ и $\cos x$, используя переход к кратным углам или иным способом.

Пример 5.55. Найти $\int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x}$.

Решение. Применяя формулы понижения степени $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, имеем

$$\cos^6 x + \sin^6 x = \frac{1}{4}(1 + 3\cos^2 2x).$$

Полагая $t = \mathrm{tg}\, 2x$, находим

$$\int\frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x} = \int\frac{4dx}{1 + 3\cos^2 2x} = 2\int\frac{dt}{t^2 + 4} = \mathrm{arctg}\frac{t}{2} + C =$$

$$= \mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}\, 2x}{2} + C.$$

2. *Использование алгебраических и тригонометрических преобразований.*

Пример 5.56. Найти $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx.$

Решение. Пользуясь тождеством $\sin x \cos x = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)^2 - \frac{1}{2}$, находим

$$\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \frac{1}{2}\int (\sin x + \cos x) dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin x + \cos x} =$$

$$= \frac{1}{2}(\sin x - \cos x) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\right| + C$$

$(x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z})$.

Пример 5.57. Найти $\int \frac{\sin x}{\sqrt{2 + \sin 2x}} dx$.

Решение. Используя тождественные преобразования, получаем

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+\sin 2x}} dx = -\frac{1}{2}\int \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sqrt{1 + (\sin x + \cos x)^2}} + \frac{1}{2}\int \frac{d(\sin x - \cos x)}{\sqrt{3 - (\sin x - \cos x)^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(\sin x + \cos x + \sqrt{2 + \sin 2x}) + \frac{1}{2}\arcsin \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{3}} + C.$$

Пример 5.58. Найти $\int \frac{\sin^5 x}{1 - \cos x} dx.$

Решение. Если знаменатель дроби тригонометрического вида содержит выражение $1 \pm \cos x$ $(1 \pm \sin x)$, то иногда бывает целесообразно одновременно домножить числитель и знаменатель этой дроби на выражение $1 \mp \cos x$ (соответственно $1 \mp \sin x$) и затем упростить знаменатель по основному тригонометрическому тождеству:

$$\int \frac{\sin^5 x}{1 - \cos x} dx = \int \frac{\sin^5 x(1 + \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} dx = \int \frac{\sin^5 x(1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x} dx =$$

$$= \int \frac{\sin^5 x(1 + \cos x)}{\sin^2 x} dx = \int \sin^3 x(1 + \cos x) dx =$$

$$= \int \sin^3 x dx + \int \sin^3 x d(\sin x) = \frac{1}{4}\int (3\sin x - \sin 3x) dx + \frac{\sin^4 x}{4} =$$

$$=-\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{\sin^4 x}{4}+C$$

$(x \neq 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z})$.

3. *Использование нестандартных подстановок.*

Пример 5.59. Найти $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+4\sin x}}$.

Решение. Положим $t=\sqrt{1+4\sin x}$, тогда $t^2 = 1 + \sin 4x$, $\cos x dx = \frac{1}{2} t dt$ и получаем

$$\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+4\sin x}}=\frac{1}{2}\int dt=\frac{t}{2}+C=\frac{1}{2}\sqrt{1+4\sin x}+C.$$

Пример 5.60. Найти $\int \frac{dx}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}$.

Решение. Произведя подстановку $t=\sqrt{1+\cos x}$, получаем

$$\int \frac{dx}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}=2\int \frac{dt}{t^2(t^2-2)}=\int\left(\frac{A}{t}+\frac{B}{t^2}+\frac{Ct+D}{t^2-2}\right)dt,$$

где методом неопределенных коэффициентов находим $A = 0$, $B = -1$, $C = 0$, $D = 1$. Таким образом, имеем

$$\int \frac{dx}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}=\frac{1}{t}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\cos x}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}}+C$$

$(x \neq \pi n,\ n \in \mathbb{Z})$.

Пример 5.61. Найти $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg} x}}dx$.

Решение. Произведем замену переменной интегрирования, полагая $t=\sqrt{\operatorname{tg} x}$, где $\pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда приходим к интегралу

$$\int (\operatorname{tg} x)^{\frac{3}{2}}dx=\int \frac{2t^4}{1+t^4}dt=2t-2\int \frac{dt}{1+t^4}=$$

$$=2t-2\int\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{t+\sqrt{2}}{t^2+t\sqrt{2}+1}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{t-\sqrt{2}}{t^2-t\sqrt{2}+1}\right)dt=$$

$$=2t-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{t+\frac{\sqrt{2}}{2}}{t^2+t\sqrt{2}+1}dt+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\left(t+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{t-\frac{\sqrt{2}}{2}}{t^2-t\sqrt{2}+1}dt-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\left(t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\right)=$$

$$=2t-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}[\operatorname{arctg}(t\sqrt{2}+1)+\operatorname{arctg}(t\sqrt{2}-1)]+C,$$

где $t=\sqrt{\operatorname{tg}x}$.

Пример 5.62. Найти $\int\frac{\sin 2xdx}{\sqrt{3-\cos^4 x}}$.

Решение. Произведем подстановку $t=\cos^2 x$, тогда $-2\cos x\sin xdx=dt$, т.е. $\sin 2xdx=-dt$. Переходя к новой переменной, получаем

$$\int\frac{\sin 2xdx}{\sqrt{3-\cos^4 x}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{3-t^2}}=-\arcsin\frac{t}{\sqrt{3}}+C=-\arcsin\frac{\cos^2 x}{\sqrt{3}}+C.$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить неопределенные интегралы.

5.1. $\int(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)^2dx$. **5.2.** $\int\frac{dx}{\sin 3x}$. **5.3.** $\int\frac{dx}{1+\cos x}$.

5.4. $\int\frac{dx}{5+4\cos x}$. **5.5.** $\int\frac{dx}{3+\sin x}$. **5.6.** $\int\frac{dx}{\sin x+\cos x}$.

5.7. $\int\frac{dx}{\sin x+2\cos x+6}$. **5.8.** $\int\frac{dx}{2+\sin x+\cos x}$.

5.9. $\int\frac{\sin xdx}{\sqrt{1+6\cos x}}$. **5.10.** $\int\frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg}x}}$ $(\operatorname{tg}x>0)$. **5.11.** $\int\sin 3x\cos 2xdx$.

5.12. $\int\cos 4x\cos 2xdx$. **5.13.** $\int\cos x\cos 2x\cos 3xdx$.

5.14. $\int \sin^3 2x \cos^2 3x dx$. **5.15.** $\int \frac{dx}{\sin x \sin 2x}$.

5.16. $\int \frac{dx}{\sin(x+1)\sin(x+7)}$. **5.17.** $\int \frac{dx}{\cos(x-1)\cos(x+2)}$.

5.18. $\int \frac{dx}{\sin x - \sin 4}$. **5.19.** $\int \frac{dx}{\cos x - \cos 3}$. **5.20.** $\int \frac{dx}{\sin 5x - \cos 1}$.

5.21. $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$. **5.22.** $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$. **5.23.** $\int \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x}$.

5.24. $\int \frac{dx}{1+\operatorname{ctg} x}$. **5.25.** $\int \sin^3 x \cos^3 x dx$. **5.26.** $\int \sin^6 x dx$.

5.27. $\int \operatorname{tg}^5 x dx$. **5.28.** $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^2 x} dx$. **5.29.** $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} dx$.

5.30. $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^2 x}$. **5.31.** $\int \frac{dx}{\sin^5 x \cos^2 x}$.

5.32. $\int \frac{dx}{7\cos^2 x + 16\sin^2 x}$. **5.33.** $\int \frac{dx}{5\cos^2 x + 9\sin^2 x}$.

5.34. $\int \sin\sqrt{x} dx$. **5.35.** $\int x\sin^3 x dx$. **5.36.** $\int x^2 \cos x dx$.

5.37. $\int e^{2x}\sin(e^x) dx$. **5.38.** $\int (x+2)\cos(x^2+4x+1) dx$.

5.39. $\int (x^2+2x+3)\cos x dx$. **5.40.** $\int x\sin(x^2) dx$. **5.41.** $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$.

5.42. $\int \frac{xdx}{\sin^4 x}$. **5.43.** $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1-4\sin x+\cos^2 x}}$. **5.44.** $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}}$.

5.45. $\int \sqrt{\cos 2x} \sin x dx$. **5.46.** $\int \sqrt{\cos 2x} \cos x dx$.

5.47. $\int \frac{1+\sin x}{\cos x\sqrt{\cos 2x}} dx$. **5.48.** $\int \frac{\sin^2 x dx}{1+\sin^2 x}$. **5.49.** $\int \frac{\sin x dx}{2\sin x + 3\cos x}$.

5.50. $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x - 3\cos x + 2}$. **5.51.** $\int \frac{\cos x dx}{\cos^2 x - 5\cos x + 6}$.

5.52. $\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$. **5.53.** $\int \frac{\sin x dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}$.

5.54. $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 5\sin x + 6}$. **5.55.** $\int \frac{\sin x + \cos x + 1}{2\sin x + \cos x + 2} dx$.

5.56. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}} dx$.

Глава 6
ИНТЕГРИРОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ, ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ, ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ И ДРУГИЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ

6.1. Интегрирование гиперболических функций

При интегрировании выражений, содержащих гиперболические функции, при необходимости выполнять преобразования над ними используются, в частности, следующие формулы:

- основное гиперболическое тождество

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1;$$

- формулы двойного аргумента

$$\mathrm{sh}\,2x = 2 \cdot \mathrm{sh}\,x \cdot \mathrm{ch}\,x; \quad \mathrm{ch}\,2x = \mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x;$$

- формулы

$$1 - \mathrm{th}^2 x = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}; \quad \mathrm{cth}^2 x - 1 = \frac{1}{\mathrm{sh}^2 x};$$

- формулы понижения степени

$$\mathrm{ch}^2 x = \frac{\mathrm{ch}\,2x + 1}{2}; \quad \mathrm{sh}^2 x = \frac{\mathrm{ch}\,2x - 1}{2};$$

- формулы суммы и разности двух аргументов:

$$\mathrm{sh}(x \pm y) = \mathrm{sh}\,x \cdot \mathrm{ch}\,y \pm \mathrm{sh}\,y \cdot \mathrm{ch}\,x; \quad \mathrm{ch}(x \pm y) = \mathrm{ch}\,x \cdot \mathrm{ch}\,y \pm \mathrm{sh}\,x \cdot \mathrm{sh}\,y;$$

$$\mathrm{th}(x \pm y) = \frac{\mathrm{th}\,x \pm \mathrm{th}\,y}{1 \pm \mathrm{th}\,x \cdot \mathrm{th}\,y}; \quad \mathrm{cth}(x \pm y) = \frac{\mathrm{cth}\,x \cdot \mathrm{cth}\,y \pm 1}{\mathrm{cth}\,y \pm \mathrm{cth}\,x};$$

• формулы преобразования произведений синусов и косинусов в суммы:

$$\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y = \frac{1}{2}(\operatorname{sh}(x + y) + \operatorname{sh}(x - y));$$

$$\operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(x + y) + \operatorname{ch}(x - y));$$

$$\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(x + y) - \operatorname{ch}(x - y)) \text{ и пр.}$$

Подчеркнем, что большинство практических приемов интегрирования подобного рода выражений имеют свои аналоги среди соответствующих приемов, разработанных для тригонометрических функций. Так, интегралы от четных степеней $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$ находятся с помощью формул понижения степени $\operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}$; $\operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}$ и $\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x = \frac{\operatorname{sh} 2x}{2}$. Интегралы от нечетных степеней $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$ находятся отделением множителя первой степени и введением новой переменной и т.д. Поэтому отдельно на них останавливаться не будем.

Обратим внимание на существующую связь между табличными интегралами ($a > 0$)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C \ (|x| > a); \tag{6.1}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right| + C \ (|x| \neq a) \tag{6.2}$$

и обратными гиперболическими функциями.

1. Известно, что обратной функцией к гиперболическому синусу $y = \operatorname{sh} x$ на множестве $\mathbb{R}$ является ареасинус $y = \operatorname{Arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $x \in \mathbb{R}$. С учетом этого один из интегралов (6.1) можно записать в виде

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \operatorname{Arsh} \frac{x}{a} + C.$$

2. Известно также, что обратными функциями к двум ветвям гиперболического косинуса $y = \operatorname{ch} x$, $x \geqslant 0$ и $y = \operatorname{ch} x$, $x \leqslant 0$ являются соответственно функции

$$y = \operatorname{Arch}^{+}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \text{ и } y = \operatorname{Arch}^{-}(x) = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1}).$$

Обе эти функции, рассмотренные как две ветви двузначной функции, носят название ареакосинуса и обозначаются $y = \operatorname{Arch} x = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$. С учетом этого получаем, что на промежутке $x > a$ второй из интегралов (6.1) принимает вид

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \operatorname{Arch}^{+}\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

3. Наконец, при $|x| < 1$ определена функция, обратная к гиперболическому тангенсу и называемая *ареатангенсом*: $y = \operatorname{Arth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$; а на промежутках $|x| > 1$ определена функция, обратная к гиперболическому котангенсу и называемая *ареакотангенсом*: $y = \operatorname{Arcth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$. Учитывая это, получаем еще одну форму записи для интеграла (6.2):

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a}\operatorname{Arth}\frac{x}{a} + C, \text{если } |x| < a, \\ \frac{1}{a}\operatorname{Arcth}\frac{x}{a} + C, \text{если } |x| > a. \end{cases}$$

Отметим, что к интегрированию гиперболических функций сводятся, в частности, интегралы вида $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})dx$, $\int R\left(x, \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\right)dx$, $\int R\left(x, \sqrt{\frac{x+a}{x-a}}\right)dx$ подстановкой $x = a \cdot \operatorname{ch} t$, $t \geqslant 0$, а также интегралы вида $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2})dx$ подстановкой $x = a \cdot \operatorname{sh} t$, $t \in \mathbb{R}$.

Пример 6.1. Найти $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x}$.

Решение. Преобразуя подынтегральное выражение, при $x \neq 0$ получаем (аналогично вычислению интеграла $\int \frac{dx}{\sin x}$):

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x} = \int \frac{dx}{2\operatorname{sh}\frac{x}{2}\operatorname{ch}\frac{x}{2}} = \int \frac{dx}{2\operatorname{th}\frac{x}{2}\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\operatorname{th}\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{th}\frac{x}{2}} = \ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Пример 6.2. Найти $\int \mathrm{sh}^2 x dx$.

Решение. Так как $\mathrm{sh}^2 x = \dfrac{\mathrm{ch}\,2x - 1}{2}$, то

$$\int \mathrm{sh}^2 x dx = \frac{1}{2}\int (\mathrm{ch}\,2x - 1)dx = \frac{1}{4}\int \mathrm{ch}\,2x d(2x) - \frac{1}{2}\int dx = \frac{1}{4}\mathrm{sh}\,2x - \frac{x}{2} + C.$$

Пример 6.3. Найти $\int \mathrm{sh}^3 x dx$.

Решение. Вычисляем:

$$\int \mathrm{sh}^2 x \cdot \mathrm{sh}\, x dx = \int \mathrm{sh}^2 x d(\mathrm{ch}\, x) = \int (\mathrm{ch}^2 x - 1) d(\mathrm{ch}\, x) = \frac{\mathrm{ch}^3 x}{3} - \mathrm{ch}\, x + C.$$

Пример 6.4. Найти $\int \mathrm{ch}^4 x dx$.

Решение. Применяя формулы понижения степени, получаем:

$$\int \mathrm{ch}^4 x dx = \frac{1}{4}\int (1 + \mathrm{ch}\,2x)^2 dx = \frac{1}{4}\int \left(1 + 2\,\mathrm{ch}\,2x + \frac{1 + \mathrm{ch}\,4x}{2}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(\frac{3}{2} + 2\,\mathrm{ch}\,2x + \frac{1}{2}\mathrm{ch}\,4x\right) dx = \frac{1}{4}\left(\frac{3x}{2} + \mathrm{sh}\,2x + \frac{1}{8}\mathrm{sh}\,4x\right) + C$$

$(x \neq 0)$.

Пример 6.5. Найти $\int \mathrm{cth}^2 x dx$.

Решение. Вычисляем:

$$\int \frac{\mathrm{ch}^2 x}{\mathrm{sh}^2 x} dx = \int \frac{1 + \mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{sh}^2 x} dx = -\mathrm{cth}\, x + x + C$$

$(x \neq 0)$.

Пример 6.6. Найти $\int \dfrac{\mathrm{sh}\, x}{\sqrt{\mathrm{ch}\,2x}} dx$.

Решение. Вычисляем:

$$\int \frac{\mathrm{sh}\, x}{\sqrt{\mathrm{ch}\,2x}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d(\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\, x)}{\sqrt{(\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\, x)^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\, x + \sqrt{\mathrm{ch}\,2x}) + C.$$

Пример 6.7. Найти $\int \dfrac{dx}{\mathrm{ch}^2 x \cdot \sqrt[3]{\mathrm{th}^2 x}}$.

Решение. Вычисляем:

$$\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x \cdot \sqrt[3]{\mathrm{th}^2 x}} = \int (\mathrm{th}\, x)^{-\frac{2}{3}} d(\mathrm{th}\, x) = 3 \cdot \sqrt[3]{\mathrm{th}\, x} + C \ (x \neq 0).$$

Пример 6.8. Найти $\int \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} 3x dx$.

Решение. Используя формулу преобразования произведения гиперболических косинусов $\operatorname{ch}\alpha \cdot \operatorname{ch}\beta = \frac{1}{2}[\operatorname{ch}(\alpha - \beta) + \operatorname{ch}(\alpha + \beta)]$, получим

$$\int \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} 3x dx = \frac{1}{2}\int (\operatorname{ch} 2x + \operatorname{ch} 4x) dx = \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2x + \frac{1}{8}\operatorname{sh} 4x + C.$$

Пример 6.9. Найти $\int \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} 2x \cdot \operatorname{sh} 3x dx$.

Решение. Последовательно применяя формулы преобразования произведения гиперболических функций в суммы, получаем

$$\int \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} 2x \cdot \operatorname{sh} 3x dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{sh} 2x \cdot (\operatorname{ch} 4x - \operatorname{ch} 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int (\operatorname{sh} 6x - \operatorname{sh} 2x - \operatorname{sh} 4x) dx = \frac{\operatorname{ch} 6x}{24} - \frac{\operatorname{ch} 4x}{16} - \frac{\operatorname{ch} 2x}{8} + C.$$

Пример 6.10. Найти $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x}$.

Решение. Пользуясь основным гиперболическим тождеством $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, представим единицу в числителе дроби как гиперболическую единицу:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{ch}^2 x} = \int \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{ch}^2 x} dx = \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} - \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = -\operatorname{cth} x - \operatorname{th} x + C$$

$(x \neq 0)$.

Пример 6.11. Найти $\int \frac{\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch}^3 x}{1 + \operatorname{ch}^2 x} dx$.

Решение. Имеем

$$\int \frac{\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch}^3 x}{1 + \operatorname{ch}^2 x} dx = \int \frac{\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x[(\operatorname{ch}^2 x + 1) - 1]}{1 + \operatorname{ch}^2 x} dx.$$

Положим $t = 1 + \operatorname{ch}^2 x$, откуда $dt = 2\operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} x \cdot dx$. Значит, имеем

$$\frac{1}{2}\int \frac{t-1}{t} dt = \frac{t}{2} - \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{ch}^2 x) - \frac{1}{2}\ln(1 + \operatorname{ch}^2 x) + C.$$

Пример 6.12. Найти $\int \sqrt{\operatorname{th} x} dx$.

Решение. Положим $t = \sqrt{\operatorname{th} x}$. Тогда $x = \operatorname{Arth}(t^2) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+t^2}{1-t^2}$ ($|t| < 1$), $dx = \dfrac{2tdt}{1-t^4}$. Переходя к новой переменной, получим

$$\int\sqrt{\operatorname{th} x}\,dx = 2\int\frac{t^2dt}{1-t^4} = \int\frac{dt}{1-t^2} - \int\frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t} - \operatorname{arctg} t + C =$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{\operatorname{th} x}}{1-\sqrt{\operatorname{th} x}}\right) - \operatorname{arctg}\sqrt{\operatorname{th} x} + C$$

($x \geqslant 0$).

6.2. Интегрирование показательных функций

Если подынтегральное выражение содержит показательную функцию, то либо этот интеграл сводится к табличному, либо следует подобрать соответствующую подстановку (внести подходящую функцию под знак дифференциала), либо проинтегрировать по частям.

Интеграл вида $\int R(e^x)dx$, где R — рациональная функция, с помощью подстановки $t = e^x$ преобразуется к интегралу от рациональной функции. Рассмотрим примеры.

Пример 6.13. Найти $\int 2^x \cdot 3^{2x} \cdot 5^{3x} dx$.

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию к виду одной показательной функции (тем самым, сведя интеграл к табличному интегралу):

$$\int 2^x \cdot 3^{2x} \cdot 5^{3x}\,dx = \int (2\cdot 3^2 \cdot 5^3)^x\,dx = \int 2250^x\,dx = \frac{2250^x}{\ln 2250} + C.$$

Пример 6.14. Найти $\int e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \dfrac{dx}{x^3}$.

Решение. Внесем функцию $\dfrac{1}{x^3}$ под знак дифференциала: $\dfrac{dx}{x^3} = d\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$ и получим

$$\int e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2}\int e^{-\frac{1}{x^2}} d\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{x^2}} + C\ (x \neq 0).$$

Пример 6.15. Найти $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$.

Решение. Умножим одновременно числитель и знаменатель дроби на e^x, а затем внесем e^x под знак дифференциала:

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1} = \int \frac{d(e^x)}{(e^x)^2 + 1} = \operatorname{arctg}(e^x) + C.$$

Пример 6.16. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + e^{2x}}}$.

Решение. Вынесем e^x из-под знака радикала и затем внесем e^{-x} под знак дифференциала:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} = \int \frac{dx}{e^x \sqrt{e^{-2x}+1}} = \int \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{e^{-2x}+1}} = -\int \frac{d(e^{-x})}{\sqrt{(e^{-x})^2+1}} =$$
$$= -\ln(e^{-x} + \sqrt{e^{-2x}+1}) + C.$$

Пример 6.17. Найти $\int \sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}} dx$.

Решение. Положим $t = e^x$. Тогда

$$\int \sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}} dx = \int \sqrt{\frac{t-1}{t+1}} \frac{dt}{t} = \int \frac{t-1}{\sqrt{t^2-1}} \frac{dt}{t} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} - \int \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}} =$$
$$= \ln(t + \sqrt{t^2-1}) + \arcsin\frac{1}{t} + C = \ln(e^x + \sqrt{e^{2x}-1}) + \arcsin(e^{-x}) + C$$

$(x \geqslant 0)$.

Пример 6.18. Найти $\int \frac{3e^{2x} + e^x + 1}{e^{2x} - 2e^x - 3} dx$.

Решение. Положим $t = e^x$. Тогда получаем интеграл $\int \frac{3t^2 + t + 1}{t(t^2 - 2t - 3)} dt$. Так как $t(t^2 - 2t - 3) = t(t + 1)(t - 3)$, то разложение на простейшие дроби имеет вид

$$\frac{3t^2 + t + 1}{t(t+1)(t-3)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{t-3}.$$

Приводя дроби в правой части к общему знаменателю и приравнивая тождественно многочлены в числителях, получим

$$3t^2 + t + 1 = A(t + 1)(t - 3) + Bt(t - 3) + Ct(t + 1).$$

Если подставить $t = 0$, то находим $A = -\frac{1}{3}$; если же подставить $t = -1$, то получим $B = \frac{1}{2}$. Наконец, если положить $t = 3$, то найдем $C = \frac{31}{12}$. Подставляя найденное разложение под знак интеграла, получим

$$\int \frac{3e^{2x}+e^{x}+1}{e^{2x}-2e^{x}-3}dx = -\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t+1} + \frac{31}{12}\int \frac{dt}{t-3} =$$
$$= -\frac{1}{3}\ln t + \frac{1}{2}\ln(t+1) + \frac{31}{12}\ln|t-3| + C =$$
$$= -\frac{x}{3} + \frac{1}{2}\ln(e^{x}+1) + \frac{31}{12}\ln|e^{x}-3| + C$$

$(x \neq \ln 3)$.

Пример 6.19. Найти $\int \frac{dx}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}}$.

Решение. Положим $t = e^{\frac{x}{6}}$, тогда

$$\int \frac{dx}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}} = 6\int \frac{dt}{t(1+t+t^{2}+t^{3})} = 6\int \frac{dt}{t(1+t)(1+t^{2})} =$$
$$= \int \frac{Adt}{t} + \int \frac{Bdt}{t+1} + \int \frac{Ct+D}{1+t^{2}}dt =$$
$$= \frac{Ax}{6} + B\ln\left(1+e^{\frac{x}{6}}\right) + \frac{C}{2}\ln\left(1+e^{\frac{x}{3}}\right) + D\,\mathrm{arctg}\left(e^{\frac{x}{6}}\right) + C_{1}.$$

Методом неопределенных коэффициентов находим $A = 6$, $B = C = D = -3$. Окончательно имеем

$$\int \frac{dx}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}} = x - 3\ln\left[\left(1+e^{\frac{x}{6}}\right)\sqrt{1+e^{\frac{x}{3}}}\right] - 3\,\mathrm{arctg}\left(e^{\frac{x}{6}}\right) + C_{1}.$$

Пример 6.20. Найти $\int x^{3}e^{3x}dx$.

Решение. Полагая $u = x^{3}$, $dv = e^{3x}dx$, проинтегрируем по частям:

$$I = \int x^{3}e^{3x}dx = \frac{x^{3}}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\cdot(3x^{2})dx = \frac{x^{3}}{3}e^{3x} - \int x^{2}e^{3x}dx.$$

Полагая теперь $u = x^2$, $dv = e^{3x}dx$, второй раз проинтегрируем по частям:

$$I = \frac{x^3}{3}e^{3x} - \left(\frac{x^2}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\cdot(2x)dx\right) = (x^3 - x^2)\frac{e^{3x}}{3} + \frac{2}{3}\int xe^{3x}dx.$$

Наконец, полагая $u = x$, $dv = e^{3x}dx$, последний раз проинтегрируем по частям:

$$I = (x^3 - x^2)\frac{e^{3x}}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx\right) = \left(x^3 - x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}\right)\frac{e^{3x}}{3} + C.$$

6.3. Интегрирование логарифмических функций

Если подынтегральное выражение содержит логарифмическую функцию, то, так же как и в случае с показательной функцией, интеграл либо сводится к табличному, либо берется с помощью некоторой подстановки (функция вносится под знак дифференциала), либо интегрируется по частям.

Пример 6.21. Найти $\int \ln x dx$.

Решение. Интегрируя по частям при $u = \ln x$, $v = x$, получаем

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\ln x - x + C \ (x > 0).$$

Пример 6.22. Найти $\int \ln^2 x dx$.

Решение. Дважды интегрируя при $x > 0$ по частям, находим

$$\int \ln^2 x dx = x\ln^2 x - \int x\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx = x\ln^2 x - 2\int \ln x dx =$$
$$= x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C.$$

Пример 6.23. Найти $\int \ln^n x dx$ $(n \in \mathbb{N})$.

Решение. Интегрируя по частям, получим рекуррентную формулу понижения степени для интегралов данного типа:

$$I_n = \int \ln^n x dx = x\ln^n x - n\int \ln^{n-1} x dx = x\ln^n x - n\cdot I_{n-1},$$

где $I_0 = x$.

Например:

$I_1 = x\ln x - x + C$;

$I_2 = x\ln^2 x - 2(x\ln x - x) + C$;

$I_2 = x\ln^3 x - 3[x\ln^2 x - 2(x\ln x - x)] + C$ и т. д. $(x > 0)$.

Пример 6.24. Найти $\int \frac{\ln x}{x} dx$.

Решение. Внесем $\frac{1}{x}$ под знак дифференциала:

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x d(\ln x) = \frac{\ln^2 x}{2} + C \; (x > 0).$$

Пример 6.25. Найти $\int x^2 \ln x dx$.

Решение. Интегрируя по частям при $u = \ln x$, $dv = x^2 dx$, получим

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^3 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C \; (x > 0).$$

Пример 6.26. Найти $\int \frac{dx}{x \ln x \cdot \ln(\ln x)}$.

Решение. Принимая во внимание, что $\frac{dx}{x \ln x} = d(\ln(\ln x))$, имеем при $x > 1$:

$$\int \frac{dx}{x \ln x \cdot \ln(\ln x)} = \int \frac{d(\ln(\ln x))}{\ln(\ln x)} = \ln|\ln(\ln x)| + C.$$

Пример 6.27. Найти $\int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^3 dx$.

Решение. Заметим, что данный интеграл относится к группе интегралов вида $\int x^n \ln^m x dx$ ($n \in \mathbb{R}$, $n \neq -1$, $m \in \mathbb{N}$), для которых существует рекуррентная формула понижения степени m:

$$\int x^n \ln^m x dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln^m x - \frac{m}{n+1} \int x^n \ln^{m-1} x dx,$$

по которой вычисление рассматриваемого интеграла сводится к вычислению интеграла такого же типа, но с меньшим на единицу показателем степени при $\ln x$. В данном случае $n = -3$, $m = 3$. На практике держать в уме формулу не имеет большого смысла, проще три раза проинтегрировать по частям:

$$\int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^3 dx = \int \frac{1}{x^3} \cdot \ln^3 x dx = -\frac{1}{2x^2} \cdot \ln^3 x + \frac{3}{2} \int \frac{1}{x^3} \cdot \ln^2 x dx =$$

$$= -\frac{1}{2x^2} \cdot \ln^3 x + \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{2x^2} \cdot \ln^2 x + \int \frac{1}{x^3} \cdot \ln x dx \right) =$$

$$=-\frac{1}{2x^2}\cdot\ln^3 x-\frac{3}{4x^2}\cdot\ln^2 x+\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2x^2}\cdot\ln x+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^3}\right)=$$

$$=-\frac{3}{4x^2}\left(\frac{2}{3}\ln^3 x+\ln^2 x+\ln x+\frac{1}{2}\right)+C\ (x>0).$$

Пример 6.28. Найти: а) $\int\sin(\ln x)dx$; б) $\int\cos(\ln x)dx$.

Решение. Интегрируя по частям каждый из интегралов, имеем:

$$I_1=\int\sin(\ln x)dx=x\sin(\ln x)-\int\cos(\ln x)dx=x\sin(\ln x)-I_2;$$

$$I_2=\int\cos(\ln x)dx=x\cos(\ln x)+\int\sin(\ln x)dx=x\cos(\ln x)+I_1.$$

Отсюда получаем, что

$$I_1=\frac{x}{2}(\sin(\ln x)-\cos(\ln x))+C;$$

$$I_2=\frac{x}{2}(\sin(\ln x)+\cos(\ln x))+C\ (x>0).$$

Замечание. Можно было бы найти эти интегралы, интегрируя последовательно каждый из них два раза по частям.

Пример 6.29. Найти $\int x^x(1+\ln x)dx$.

Решение. Положим $t=x^x$, тогда $dt=x^x(1+\ln x)dx$ и для интеграла имеем

$$\int x^x(1+\ln x)dx=\int dt=t+C=x^x+C\ (x>0).$$

Пример 6.30. Найти $\int\frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

Решение. Интегрируя по частям, находим

$$\int\frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})d(\sqrt{1+x^2})=$$

$$=\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\int dx=\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})-x+C.$$

Пример 6.31. Найти $\int\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})dx$.

Решение. Применяя интегрирование по частям, получаем

$$\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})dx = x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - 2\int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}dx =$$

$$= x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \ln(x+\sqrt{1+x^2})d(2\sqrt{1+x^2}) =$$

$$= x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - 2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + 2x + C.$$

Пример 6.32. Найти $\int x\sqrt{x^2+1}\cdot\ln(\sqrt{x^2-1})dx$.

Решение. Положим $t=\sqrt{x^2+1}$ и проинтегрируем по частям:

$$\int x\sqrt{x^2+1}\cdot\ln(\sqrt{x^2-1})dx = \frac{1}{2}\int t^2\ln(t^2-2)dt = \frac{1}{2}\int \ln(t^2-2)d\left(\frac{t^3}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}t^3\ln(t^2-2) - \frac{1}{3}\int\frac{t^4dt}{t^2-2} =$$

$$= \frac{1}{6}t^3\ln(t^2-2) - \frac{1}{3}\left(\frac{t^3}{3} + 2t + \sqrt{2}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|\right) + C =$$

$$= \frac{\sqrt{(x^2+1)^3}}{3}\ln(\sqrt{x^2-1}) - \frac{x^2+7}{9}\sqrt{x^2+1} - \frac{\sqrt{2}}{3}\ln\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2}} + C$$

$(|x| > 1)$.

Пример 6.33. Найти $\int \frac{ax^2+b}{x^2-1}\cdot\ln\frac{1-x}{1+x}dx$.

Решение. Положим $x = \operatorname{th} t$, тогда $t = \frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}$ и интеграл примет вид

$$\int\frac{ax^2+b}{x^2-1}\cdot\ln\frac{1-x}{1+x}dx = \int\frac{a\operatorname{th}^2t+b}{\operatorname{th}^2t-1}\cdot(-2t)\frac{dt}{\operatorname{ch}^2t} =$$

$$= 2\int(a\operatorname{th}^2t+b)tdt = bt^2 + 2a\int t\cdot\operatorname{th}^2tdt.$$

Последний интеграл вычисляем интегрированием по частям:

$$\int t\cdot\operatorname{th}^2tdt = \int td(t-\operatorname{th}t) = t(t-\operatorname{th}t) - \int(t-\operatorname{th}t)dt =$$

$$= \frac{t^2}{2} - t\cdot\operatorname{th}t + \ln|\operatorname{ch}t| + C.$$

Итак,

$$\int \frac{ax^2+b}{x^2-1}\cdot \ln\frac{1-x}{1+x}dx = bt^2+2a\left(\frac{t^2}{2}-t\cdot \operatorname{th} t+\ln \operatorname{ch} t\right)+C=$$

$$=(a+b)t^2-2at\cdot \operatorname{th} t+2a\ln|\operatorname{ch} t|+C=$$

$$=(a+b)\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right)^2-ax\cdot\ln\frac{1+x}{1-x}+2a\ln\left|\operatorname{ch}(\operatorname{Arth} x)\right|+C=$$

$$=\frac{a+b}{4}\ln^2\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+a\left(x\ln\frac{1-x}{1+x}-\ln(1-x^2)\right)+C,$$

так как $\operatorname{ch}(\operatorname{Arth} x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x| < 1)$.

6.4. Интегрирование обратных тригонометрических функций

При интегрировании обратных тригонометрических функций используются все те же общие приемы интегрирования (преобразования, замена переменной, интегрирование по частям). Напомним, что интегралы вида

$$\int P(x)\arcsin x dx,\ \int P(x)\arccos x dx,\ \int P(x)\operatorname{arctg} x dx,\ \int P(x)\operatorname{arcctg} x dx,$$

где $P(x)$ — целый алгебраический многочлен относительно x, вычисляются интегрированием по частям. При этом в качестве u выбираются соответственно функции $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$, а за dv берется выражение $P(x)dx$.

Пример 6.34. Найти $\displaystyle\int \frac{dx}{\arcsin^5 x\cdot\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. Вычисляем:

$$\int \frac{d(\arcsin x)}{\arcsin^5 x} = -\frac{1}{4\cdot \arcsin^4 x}+C\ (0<|x|<1).$$

Пример 6.35. Найти $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{dx}{x+1}$.

Решение. Полагая $t = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$, имеем $x = \operatorname{tg}^2 t$, $dx = 2\operatorname{tg} t\cdot\dfrac{dt}{\cos^2 t}$ и тогда

$$\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{x+1} = \int \frac{t}{\operatorname{tg} t} \cdot \frac{2\operatorname{tg} t \cdot dt}{\cos^2 t \cdot (\operatorname{tg}^2 t + 1)} = 2\int t dt =$$

$$= t^2 + C = \operatorname{arctg}^2(\sqrt{x}) + C$$

$(x > 0)$.

Пример 6.36. Найти $\int \arccos x dx$.

Решение. Интегрируя по частям и полагая $u = \arccos x$, $dv = dx$, определяем $du = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$, $v = x$. Следовательно,

$$\int \arccos x dx = x \arccos x + \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= x \arccos x - \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2) = x \arccos x - \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{1/2} + C =$$

$$= x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$$

$(|x| < 1)$.

Пример 6.37. Найти $\int \operatorname{arctg} x dx$.

Решение. Полагая $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = dx$, интегрируем по частям:

$$\int \operatorname{arctg} x dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x dx}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{1+x^2} =$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Пример 6.38. Найти $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$.

Решение. Интегрируя по частям, получаем

$$\int \operatorname{arctg}\sqrt{x} dx = x \cdot \operatorname{arctg}\sqrt{x} - \int \frac{x dx}{2\sqrt{x}(x+1)} =$$

$$= x \cdot \operatorname{arctg}\sqrt{x} - \int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}(x+1)} \right) dx =$$

$$= x \cdot \operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + \int \frac{d(\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^2 + 1} = x \cdot \operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg}\sqrt{x} + C$$

$(x > 0)$.

Пример 6.39. Найти $\int x^2 \arccos x dx$.

Решение. Положим $u = \arccos x$, $x^2 dx = dv$. Тогда, интегрируя по частям, получаем

$$\int x^2 \arccos x dx = \int \arccos x d\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{x^3}{3}\arccos x + \frac{1}{3}\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Образовавшийся в правой части интеграл еще раз проинтегрируем по частям, положив на этот раз $u = x^2$, $dv = \frac{-xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ ($|x| \leqslant 1$):

$$\frac{x^3}{3}\arccos x - \frac{1}{3}\int x^2 d(\sqrt{1-x^2}) =$$
$$= \frac{x^3}{3}\arccos x - \frac{x^2}{3}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{3}\int \sqrt{1-x^2}\, d(x^2) =$$
$$= \frac{x^3}{3}\arccos x - \frac{x^2}{3}\sqrt{1-x^2} - \frac{2}{9}\sqrt{(\sqrt{1-x^2})^3} + C.$$

Пример 6.40. Найти $\int (\arcsin x)^2 dx$.

Решение. Интегрируя по частям, находим

$$\int (\arcsin x)^2 dx = x \cdot (\arcsin x)^2 - \int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \arcsin x dx =$$
$$= x \cdot (\arcsin x)^2 + 2\int \arcsin x \cdot d(\sqrt{1-x^2}) =$$
$$= x \cdot (\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x - 2x + C$$

($|x| < 1$).

Пример 6.41. Найти $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^3} dx$.

Решение. Интегрируя по частям, положим $u = \operatorname{arctg} x$, $\frac{dx}{x^3} = dv$. Тогда $u' = \frac{1}{x^2+1}$, $v = -\frac{1}{2x^2}$ и имеем

$$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^3} dx = \int \operatorname{arctg} x d\left(-\frac{1}{2x^2}\right) =$$
$$= \operatorname{arctg} x \cdot \left(-\frac{1}{2x^2}\right) - \int \left(-\frac{1}{2x^2}\right) \cdot \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$=-\frac{1}{2x^2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2(x^2+1)}=$$

$$=-\frac{1}{2x^2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\int\frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(x^2+1)}dx=$$

$$=-\frac{1}{2x^2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\left(\int\frac{dx}{x^2}-\int\frac{dx}{x^2+1}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2x^2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x}-\operatorname{arctg}x\right)+C=$$

$$=-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x\cdot\left(\frac{1}{x^2}+1\right)-\frac{1}{2x}+C$$

$(x\neq 0)$.

Пример 6.42. Найти $\int x\cdot\operatorname{arcin}(1-x)dx$.

Решение. Применяя простейшие преобразования, замену $u=1-x$ и интегрирование по частям, находим

$$\int x\cdot\arcsin(1-x)dx=$$

$$=\int(1-x)\arcsin(1-x)d(1-x)-\int\arcsin(1-x)d(1-x)=$$

$$=\int u\arcsin u\,du-\int\arcsin u\,du=$$

$$=\frac{u^2}{2}\arcsin u-\frac{1}{2}\int\frac{u^2du}{\sqrt{1-u^2}}-u\arcsin u+\int\frac{udu}{\sqrt{1-u^2}}=$$

$$=\frac{u^2}{2}\arcsin u-\frac{1}{2}\int\frac{u^2du}{\sqrt{1-u^2}}-u\arcsin u-\sqrt{1-u^2}.$$

Интеграл $\int\frac{u^2du}{\sqrt{1-u^2}}$ вычислим тригонометрической подстановкой $u=\sin t$, где $t\in\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$:

$$\int\frac{u^2du}{\sqrt{1-u^2}}=\int\sin^2 t\,dt=\frac{1}{2}\int(1-\cos 2t)dt=\frac{t}{2}-\frac{1}{4}\sin 2t+C_1=$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin u-\frac{u}{2}\sqrt{1-u^2}+C_1.$$

Окончательно имеем

$$\int x \cdot \arcsin(1-x)dx =$$

$$= \frac{u^2}{2}\arcsin u - u\arcsin u - \sqrt{1-u^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\arcsin u - \frac{u}{2}\sqrt{1-u^2}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin u \cdot \left(u^2 - 2u - \frac{1}{2}\right) - \sqrt{1-u^2}\left(1 - \frac{u}{4}\right) + C =$$

$$= \frac{2x^2-3}{4}\arcsin(1-x) - \sqrt{2x-x^2} \cdot \frac{x+3}{4} + C$$

($x \in (0; 2)$).

Пример 6.43. Найти $\int \frac{\arcsin x}{x^2} \cdot \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Решение. Положим $t = \arcsin x$, разобьем интеграл на сумму двух интегралов и затем один из них проинтегрируем по частям ($0 < |x| < 1$):

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2} \cdot \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{t}{\sin^2 t} \cdot \frac{1+\sin^2 t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cos t dt =$$

$$= \int \frac{t}{\sin^2 t}(1+\sin^2 t)dt = \frac{t^2}{2} + \int \frac{tdt}{\sin^2 t} = \frac{t^2}{2} - \int td(\operatorname{ctg} t) =$$

$$= \frac{t^2}{2} - t \cdot \operatorname{ctg} t + \ln|\sin t| + C =$$

$$= \frac{(\arcsin x)^2}{2} - \arcsin x \cdot \frac{\cos(\arcsin x)}{\sin(\arcsin x)} + \ln|\sin(\arcsin x)| + C =$$

$$= \frac{(\arcsin x)^2}{2} - \arcsin x \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \ln|x| + C.$$

Пример 6.44. Найти $\int \frac{ax^2+b}{x^2+1} \cdot \operatorname{arctg} x dx$.

Решение. Положим $t = \operatorname{arctg} x$, тогда $x = \operatorname{tg} t$ и приходим к интегралу

$$\int \frac{ax^2+b}{x^2+1} \cdot \operatorname{arctg} x dx = \int t(a\operatorname{tg}^2 t + b)dt = \frac{bt^2}{2} + a\int t \cdot \operatorname{tg}^2 t dt.$$

Последний интеграл вычислим интегрированием по частям:

$$\int t\cdot \mathrm{tg}^2\, t dt=\int t d(\mathrm{tg}\, t-t)=t(\mathrm{tg}\, t-t)-\int(\mathrm{tg}\, t-t)dt=$$
$$=t\cdot \mathrm{tg}\, t-\frac{t^2}{2}+\ln|\cos t|+C.$$

Подставляя, окончательно получим

$$\int\frac{ax^2+b}{x^2+1}\cdot \mathrm{arctg}\, x dx=\frac{bt^2}{2}+a\left(t\cdot \mathrm{tg}\, t-\frac{t^2}{2}+\ln|\cos t|\right)+C=$$
$$=\frac{b-a}{2}t^2+at\cdot \mathrm{tg}\, t+a\ln|\cos t|+C=$$
$$=\frac{b-a}{2}\mathrm{arctg}^2\, x+ax\cdot \mathrm{arctg}\, x+a\ln|\cos(\mathrm{arctg}\, x)|+C=$$
$$=\frac{b-a}{2}\mathrm{arctg}^2\, x+ax\cdot \mathrm{arctg}\, x-\frac{1}{2}a\ln(1+x^2)+C$$

(так как $\cos(\mathrm{arctg}\, x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$).

Пример 6.45. Найти $\int\frac{\arcsin(e^x)}{e^x}dx$.

Решение. Положим $t=e^x$, тогда

$$\int\frac{\arcsin(e^x)}{e^x}dx=\int\frac{\arcsin t}{t^2}dt=-\frac{1}{t}\arcsin t+\int\frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}}=$$
$$=-\frac{1}{t}\arcsin t-\ln\frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}+C=$$
$$=-e^{-x}\arcsin(e^x)-\ln(1+\sqrt{1-e^{2x}})+x+C\ (x<0).$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить неопределенные интегралы.

6.1. $\int \mathrm{sh}^2 x\, \mathrm{ch}^2 x dx$. **6.2.** $\int(\mathrm{sh}\, x-\mathrm{ch}\, x)^2dx$. **6.3.** $\int \mathrm{sh}(ax)\cos(bx)dx$.

6.4. $\int\sqrt{2^x-1}dx$. **6.5.** $\int\frac{2^{2x}-1}{\sqrt{2^x}}dx$. **6.6.** $\int\frac{2^{2x-1}-3^{2x+3}}{6^{2x}}dx$.

6.7. $\int x^2e^{-\frac{x}{2}}dx$. **6.8.** $\int(2x^2-2x+1)e^{-\frac{x}{2}}dx$. **6.9.** $\int e^x\sin x dx$.

6.10. $\int e^{2x}\sin^2 x dx$. **6.11.** $\int e^x\cos(e^x)dx$. **6.12.** $\int x^7e^{-x^2}dx$.

6.13. $\int\frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}}dx$. **6.14.** $\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}$. **6.15.** $\int\frac{e^{2x}}{e^{4x}+4}dx$.

6.16. $\int \frac{e^x + e^{2x}}{1 - e^x}dx$. **6.17.** $\int \frac{2e^{2x} - e^x - 3}{e^{2x} - 2e^x - 3}dx$.

6.18. $\int \frac{e^{2x} + 3e^x + 16}{e^{4x} - 16}dx$. **6.19.** $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^2 x}}{x}dx$. **6.20.** $\int \frac{dx}{x\ln x}$.

6.21. $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$. **6.22.** $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$. **6.23.** $\int x\ln^2 x dx$. **6.24.** $\int \sqrt{x}\ln^2 x dx$.

6.25. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$. **6.26.** $\int x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)dx$. **6.27.** $\int x\ln x\frac{x}{1 + x^2}dx$.

6.28. $\int \ln(x^2 + x)dx$. **6.29.** $\int x^2\ln(1 + x)dx$. **6.30.** $\int \cos^2(\ln x)dx$.

6.31. $\int \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x}dx$. **6.32.** $\int \sin 2x\ln\cos x dx$.

6.33. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2\ln x + x^3}}dx$. **6.34.** $\int \frac{\ln x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}dx$.

6.35. $\int \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})dx$. **6.36.** $\int \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{(1+x^2)^3}}dx$.

6.37. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ln\frac{x}{\sqrt{1-x}}dx$. **6.38.** $\int x \cdot \operatorname{arctg} x \cdot \ln(1 + x^2)dx$.

6.39. $\int x\arcsin x dx$. **6.40.** $\int x\operatorname{arcctg} x dx$. **6.41.** $\int x^2\arcsin x dx$.

6.42. $\int x^2\operatorname{arctg} x dx$. **6.43.** $\int x\arccos\frac{1}{x}dx$. **6.44.** $\int \frac{x\arccos x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}dx$.

6.45. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx$. **6.46.** $\int x^2\operatorname{arctg}^2 x dx$. **6.47.** $\int \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx$.

6.48. $\int \frac{\operatorname{arcctg}(3x)}{1 + 9x^2}dx$. **6.49.** $\int \frac{x + \arccos^{\frac{3}{2}} x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

6.50. $\int \frac{x + \arcsin^3(2x)}{\sqrt{1-4x^2}}dx$. **6.51.** $\int \frac{x + \sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2}dx$.

6.52. $\int \frac{\arcsin x - \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$. **6.53.** $\int \frac{x^2 - 2}{x^2 + 1}\operatorname{arctg} x dx$.

6.54. $\int \frac{3 + 2x^2}{x^2 + 1}\operatorname{arctg} x dx$. **6.55.** $\int \frac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

6.56. $\int \frac{x^4\operatorname{arctg} x}{1 + x^2}dx$. **6.57.** $\int \frac{\operatorname{arctg}\left(e^{\frac{x}{2}}\right)}{e^{\frac{x}{2}}(1+e^x)}dx$.

Ответы

Глава 1

1.1. $\dfrac{x|x|}{2}+C$. **1.2.** $\dfrac{1}{2}((1+x)|1+x|+(1-x)|1-x|)+C$.

1.3. $\begin{cases} x+C, \text{если } -\infty<x<0, \\ \dfrac{x^2}{2}+x+C, \text{если } 0\leqslant x\leqslant 1, \\ x^2+0{,}5+C, \text{если } 1<x<+\infty. \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} x-\dfrac{x^3}{3}+C, \text{если } |x|\leqslant 1, \\ x-\dfrac{x|x|}{2}+\dfrac{1}{6}\operatorname{sgn} x+C, \text{если } |x|>1. \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} \dfrac{x^3}{3}-x-\dfrac{4}{3}+C, \text{если } -\infty<x<-1, \\ x-\dfrac{x^3}{3}+C, \text{если } -1\leqslant x<1, \\ \dfrac{x^3}{3}-x+\dfrac{4}{3}+C, \text{если } 1\leqslant x<+\infty. \end{cases}$

1.6. $|x-2n|+C$, где $2n-1\leqslant x\leqslant 2n+1$, $n\in\mathbb{Z}$.

1.7. $\begin{cases} 5x-\dfrac{x^3}{3}+6, \text{если } x<-2, \\ x+\dfrac{2}{3}, \text{если } -2\leqslant x<-1, \\ \dfrac{x^3}{3}, \text{если } -1\leqslant x\leqslant 1, \\ x-\dfrac{2}{3}, \text{если } 1<x\leqslant 2, \\ 5x-\dfrac{x^3}{3}-6, \text{если } x>2. \end{cases}$

Глава 2

2.1. $\frac{1}{2}x^2 - x + \ln|x-1| + C$. **2.2.** $\frac{2^{3x}}{6\ln 2} + C$. **2.3.** $-\frac{1}{5}\ln|3-5x| + C$.

2.4. $\frac{1}{2}e^{x^2} + C$. **2.5.** $x\sin x + \cos x + C$. **2.6.** $x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$.

2.7. $\arcsin\frac{x}{2\sqrt{2}} + C$. **2.8.** $-\operatorname{ctg} x - x + C$. **2.9.** $x\left(x + \frac{|x|}{2}\right) + C$.

2.10. $2\sqrt{x} + \frac{\ln^2 x}{2} + C$. **2.11.** $\frac{3}{10}\ln\left(x^2 + \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\sqrt{5}x + C$.

2.12. $-e^{\frac{1}{x}} + C$. **2.13.** $\frac{1}{2}\cos(1-x^2) + C$. **2.14.** $-\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{6}\cos 2x + C$.

2.15. $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$. **2.16.** $\ln|x + \cos x| + C$. **2.17.** $\arcsin\frac{\sin^2 x}{\sqrt{2}} + C$.

2.18. $\frac{1}{175}(5x-2)^9 + \frac{1}{100}(5x-2)^8 + C$.

2.19. $2\arcsin\frac{x}{2} + x\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} + C$. **2.21.** $xe^x - e^x + C$.

2.22. $\frac{x^3}{3}\left(\ln^2 x - \frac{2}{3}\ln x + \frac{2}{9}\right) + C$. **2.23.** $\frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + C$.

2.24. $\frac{6}{7}\sqrt{2}\sqrt[6]{3}\sqrt[6]{x^7} + C$. **2.25.** $x + \frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}} + \frac{9}{7}x^{\frac{7}{3}} + \frac{x^3}{3} + C$.

2.26. $\frac{2^{x+3}\cdot 5^{2x-1}}{\ln 50} + C$. **2.27.** $\frac{x^4}{4} + 3\operatorname{arctg} x + C$.

2.28. $\frac{2x^2}{3}(x + |x|) + C$. **2.29.** $xf'(x) - f(x) + C$.

2.30. $\frac{1}{2}f(2x) + C$. **2.31.** $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + x + C,\ x < 0, \\ -\frac{x^4}{4} + x + C, x \geqslant 0. \end{cases}$

Глава 3

3.1. $-\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\ln|4x-3| + C$ $(x \neq \frac{3}{4})$.

3.2. $\frac{2}{3}x+\frac{5}{9}\ln\left|x+\frac{2}{3}\right|+C\ (x\neq-\frac{2}{3})$. **3.3.** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{3x+1}{3x+3}\right|+C\ (x\neq-\frac{1}{3};\quad 1)$.

3.4. $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x+5}{x-3}\right|+C\ (x\neq-5;3)$. **3.5.** $\ln\left|\frac{x+2}{x+3}\right|+C\ (x\neq-3;-2)$.

3.6. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{(x-1)^4}{x+2}\right|+C\ (x\neq-2;1)$. **3.7.** $\ln\sqrt[5]{(x-1)^2(x+4)^8}+C$

$(x\neq-4;\ 1)$. **3.8.** $\frac{1}{10}\ln(5x^2+2x+1)+\frac{2}{5}\operatorname{arctg}\frac{5x+1}{2}+C$.

3.9. $\frac{5}{2}\ln(x^2+10x+29)-11\operatorname{arctg}\frac{x+5}{2}+C$. **3.10.** $\frac{(x-1)^{11}}{11}+C$.

3.11. $\frac{1}{87}(1-3x)^{-29}+C\ (x\neq\frac{1}{3})$.

3.12. $-\frac{1}{99(x-1)^{99}}-\frac{3}{98(x-1)^{98}}-\frac{3}{97(x-1)^{97}}-\frac{1}{96(x-1)^{96}}+C\ (x\neq1)$.

3.13. $-\frac{4}{11}(1-x)^{11}+2(1-x)^{10}-\frac{25}{9}(1-x)^9+C$.

3.14. $\frac{(x+1)^2}{2}-2x+2\ln|1+x|+C\ (x\neq-1)$.

3.15. $-\frac{1}{x}-\frac{x}{2(1+x^2)}-\frac{3}{2}\operatorname{arctg}x+C\ (x\neq0)$.

3.16. $-\frac{1}{4(x-1)^2}-\frac{3}{8(x-1)}+\frac{5}{32}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|+C\ (x\neq-3;1)$.

3.17. $\ln|x+1|+\frac{4}{x+2}+C\ (x\neq-2;\ 1)$.

3.18. $\frac{1}{x}+\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C\ (x\neq0;1)$.

3.19. $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}(x^2)+C\ (x\neq\pm1)$.

3.20. $\frac{3}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$.

3.21. $\frac{1}{x^2+2x+2}+\operatorname{arctg}(x+1)+C$.

3.22. $-\frac{3}{2(x^2+2x+10)}-\frac{x+1}{18(x^2+2x+10)}-\frac{1}{54}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}+C$.

3.23. $\dfrac{x-7}{8(x^2+2x+5)}+\dfrac{1}{16}\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{2}+C.$

3.24. $\dfrac{x}{8(x^2+2)^2}+\dfrac{3x}{32(x^2+2)}+\dfrac{3\sqrt{2}}{64}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{2}}+C.$ **3.25.** $\dfrac{x}{4(x^4+1)}+$

$+\dfrac{3}{4}\left[\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\ln\dfrac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}[\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}+1)+\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}-1)]\right]+C.$

3.26. $\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}x^3+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x^2-1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{12}\ln\dfrac{(x^2+1)^2}{x^4-x^2+1}+C.$

3.27. $\operatorname{arctg}x+\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}(x^3)+C.$ **3.28.** $\ln|x|-\dfrac{1}{7}\ln(1+x^7)^2+C$ $(x\neq 0;-1)$. **3.29.** $\ln\left|\dfrac{(x-1)(x+2)}{x}\right|+C\ (x\neq -2;0;1).$

3.30. $\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{(x+1)^2(x-2)}{(x-1)(x+2)^2}\right|+C\ (x\neq -2;-1;1;2).$

3.31. $\ln\left|\dfrac{(x-1)^3(x-4)^5}{(x-2)^7}\right|+C\ (x\neq 1;2;4).$

3.32. $\dfrac{1}{8}\ln\left|\dfrac{(2x-1)^2(2x-5)^3}{2x+3}\right|+C\ (x\neq -\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{2}).$

3.33. $\dfrac{3}{2}\ln|x+1|-2\ln|x+2|+\dfrac{1}{2}\ln|x+3|+C\ (x\neq -3;-2;-1).$

3.34. $\dfrac{1}{3}\ln|x+1|-\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{1}{3}\ln(x^2+2)-\dfrac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{2}}+C\ (x\neq -1).$

3.35. $\ln|x|-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+\dfrac{3x+1}{2(1+x^2)}+\dfrac{3}{2}\operatorname{arctg}x+C.$

3.36. $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{33}{16(x-2)}+\dfrac{127}{32}\ln|x-2|+\dfrac{31}{16(x+2)}+\dfrac{129}{32}\ln|x+2|+C$ $(x\neq \pm 2).$

Глава 4

4.1. $\dfrac{2}{5}(x-2)^{\frac{5}{2}}+\dfrac{4}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}}+C\ (x\geqslant 2).$

4.2. $-3\left(\dfrac{1}{4}t^4-\dfrac{2}{7}t^7+\dfrac{1}{10}t^{10}\right)+C$, где $t=\sqrt[3]{1-x}$.

4.3. $\frac{2}{3}\sqrt{(x+4)^3}-8\sqrt{x+4}+C\ (x>-4)$.

4.4. $-\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{2}}+C\ \ (x<1)$.

4.5. $\ln\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1}-\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$, где $t=\sqrt{x+1}\ (x>-1;\ x\neq 0)$.

4.6. $\frac{3}{2}(2x+1)^{\frac{1}{3}}+3(2x+1)^{\frac{1}{6}}+3\ln\left|(2x+1)^{\frac{1}{6}}-1\right|+C\ (x>-\frac{1}{2};\ x\neq 0)$.

4.7. $3\ln\left|\sqrt[6]{2x-1}-1\right|-3\ln\sqrt[6]{2x-1}+C\ (x>\frac{1}{2};\ x\neq 1)$.

4.8. $-6t-3\ln\left|4-t^2\right|-6\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|+C$, где $t=\sqrt[6]{x+1}\ (x>-1;\ x\neq 63)$.

4.9. $\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C\ \ (-1<x\leqslant 1)$.

4.10. $\frac{1}{3}\ln\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2}+\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+\frac{2t}{t^3-1}$, где $t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\ (x\neq 1)$.

4.11. $\frac{2x-1}{4}\sqrt{x^2-x-6}+\frac{35}{8}\ln\left|x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x-6}\right|+3\sqrt{x^2-x-6}+C$ $(x\notin(-2;\ 3])$. **4.12.** $\frac{1}{2}\ln\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2}+\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$, где $t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$ $(x\neq\pm 1)$. **4.13.** $\frac{1}{2}\ln\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2}+\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$, где $t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$ $(x\neq\pm 1)$. **4.14.** $\frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}+C\ (x\notin[-2;1])$. **4.15.** $-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+C\ (x\neq\pm 1)$.

4.16. $\frac{3}{4}\ln\frac{x\sqrt[3]{x}}{(1+\sqrt[6]{x})^2(1-\sqrt[6]{x}+2\sqrt{x})^3}-\frac{3}{2\sqrt{7}}\mathrm{arctg}\frac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{7}}+C\ (x>0)$.

4.17. $\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x}\right|+C\ \ (x\notin[-2;\ 0])$.

4.18. $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+3}\right|+C$. **4.19.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x+1}{2}+C$ $(x\in(-3;\ 1))$. **4.20.** $-5\sqrt{-x^2+4x+5}+13\arcsin\frac{x-2}{3}+C\ (x\in(-1;\ 5)$.

4.21. $3\sqrt{x^2+x+2}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+2}\right|+C$.

4.22. $\frac{x+2}{2}\sqrt{x^2+4x+13}+\frac{9}{2}\ln\left|x+2\right|+\sqrt{x^2+4x+13}+C$.

4.23. $\frac{x-2}{2}\sqrt{5+4x-x^2}+\frac{9}{2}\arcsin\frac{x-2}{3}+C$ $(x\in(-1;5))$.

4.24. $-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$ $(|x|\leqslant 1)$.

4.25. $(1+x-x^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)\sqrt{1+x-x^2}-\frac{5}{16}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+C$

$(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1+\sqrt{5}}{2})$. **4.26.** $\frac{1}{3}(x^2+4x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}(x+2)\sqrt{x^2+4x+1}+$

$+\frac{3}{2}\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+1}\right|+C$ $(x\notin(-2-\sqrt{3};-2+\sqrt{3}))$.

4.27. $\frac{2x-3}{4}\sqrt{x^2+x+1}-\frac{1}{8}\ln\left(\frac{1}{2}+x+\sqrt{x^2+x+1}\right)+C$.

4.28. $-\arcsin\frac{x+1}{x\sqrt{3}}+C$ $(x\notin\left[\frac{1-\sqrt{3}}{2};\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right])$.

4.29. $\sqrt{\frac{x}{x+2}}+C$ $(x\notin[-2;0])$. **4.30.** $-\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|+C$

$(x\neq-1)$. **4.31.** $-\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{3(x-1)}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{3}(x-1)}\right|+C$

$(x\neq-1)$. **4.32.** $-\frac{1}{2x^2}\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{|x|}+C$ $(x\neq 0)$.

4.33. $\frac{2x^2+1}{3x^3}\sqrt{x^2-1}+C$ $(|x|>1)$.

4.34. $-\left(\frac{x}{2}+5\right)\sqrt{-x^2+4x}+13\arcsin\frac{x-2}{2}+C$ $(x\in(0;4))$.

4.35. $\sqrt{x^2+2x+2}+\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})-$

$-\sqrt{2}\ln\left|\frac{x+2+\sqrt{2(x^2+2x+2)}}{x}\right|+C$ $(x\neq 0)$.

4.36. $-\frac{19+5x+2x^2}{6}\sqrt{1+2x-x^2}-4\arcsin\frac{1-x}{\sqrt{2}}+C$.

4.37. $2\sqrt{(1+\sqrt[3]{x})^3}+C$ $(x\geqslant-1;\ x\neq 0)$.

4.38. $\frac{1}{10}\ln\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1}+\frac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$, где $t=\sqrt[3]{1+x^5}$ $(x\neq-1;0)$.

4.39. $-\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}+1}+C\ (x>0)$. **4.40.** $3\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x}+C\ (x\neq 0)$.

4.41. $-\dfrac{1}{2(\sqrt[4]{x}+1)^8}+\dfrac{4}{9(\sqrt[4]{x}+1)^9}+C\ (x>0)$. **4.42.** $\dfrac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}+C$

$(x\neq 0)$. **4.43.** $\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{(\sqrt{1+x^3}-1)^2}{x^3}\right|+C\ (x>-1;\ x\neq 0)$.

4.44. $\dfrac{1}{2}(x^2-x\sqrt{x^2-1}+\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|)+C\ (x\geqslant 1)$.

4.45. $\arcsin x+\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C\ (|x|<1)$.

4.46. $-\dfrac{2}{5}(x+2)^{\frac{5}{2}}+\dfrac{4}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}+\dfrac{2}{5}(x+3)^{\frac{5}{2}}-2(x+3)^{\frac{3}{2}}+C\ (x\geqslant -2)$.

4.47. $\arcsin\dfrac{x-1}{\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2+2x-x^2}}{(1-x)\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2+2x-x^2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2+2x-x^2}}\right|+C$

$(x\in(1-\sqrt{3};1+\sqrt{3}))$.

4.48. $\dfrac{x}{2\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}\right|+C\ (x\neq\pm 1)$.

4.49. $\dfrac{2(x-1)}{3\sqrt{x^2+x+1}}+C$.

4.50. $\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{x-3}{|x-1|\sqrt{5}}-\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{3x+1-2\sqrt{x^2-x-1}}{x+1}\right|+C$

$\left(x\notin\left[\dfrac{1-\sqrt{5}}{2};\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right];\ x\neq -1\right)$.

4.51. $\dfrac{3}{2(2t+1)}+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{t^4}{|2t+1|^3}+C$, где $t=x+\sqrt{x^2+x+1}\ (x\neq -1)$.

4.52. $\ln\left|\dfrac{t-1}{t}\right|-2\operatorname{arctg}t+C$, где $t=\dfrac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}$ $x\in[-1-\sqrt{2};-1+\sqrt{2}]$.

4.53. $x-2\ln|x+2|+\sqrt{x^2-x-2}-\dfrac{5}{2}\ln\left|x-\dfrac{1}{2}+\sqrt{x^2-x-2}\right|-$

$-2\ln\left|\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{5}{8}+\sqrt{\dfrac{1}{(x+2)^2}-\dfrac{5}{4(x+2)}+\dfrac{1}{4}}\right|+C\ (x\notin(-1;2);\ x\neq -2)$.

4.54. $\dfrac{2(3-4t)}{5(1-t-t^2)}+\dfrac{2}{5\sqrt{5}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{5}+1+2t}{\sqrt{5}-1-2t}\right|+C$, где $t=-x+\sqrt{x(1+x)}$

$(x\notin(-1;0))$.

4.55. $\left(\frac{1}{4}x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{9}{2}x+6\right)\sqrt{x^2+2x+3}-\frac{53}{2}\ln|x+1|+$
$+\sqrt{x^2+2x+3}+C\ (x\neq-1)$.

Глава 5

5.1. $\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C\ (x\neq\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z})$. **5.2.** $\frac{1}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{3x}{2}\right|+C$
$(x\neq\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z})$. **5.3.** $\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C\ (x\neq\pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z})$.

5.4. $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C$. **5.5.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{2\sqrt{2}}+C$.

5.6. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|+C\ \ (x\neq-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z})$.

5.7. $\frac{2}{\sqrt{31}}\operatorname{arctg}\frac{4\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{31}}+C$. **5.8.** $\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{2}}+C$.

5.9. $-\frac{1}{3}\sqrt{1+6\cos x}+C\ (\cos x>-\frac{1}{6})$.

5.10. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1}\right|-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t\sqrt{2}}{t^2-1}+C, t=\operatorname{tg}x$.

5.11. $-\frac{\cos 5x}{10}-\frac{\cos x}{2}+C$. **5.12.** $\frac{1}{12}\sin 6x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$.

5.13. $\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}\sin 2x+\frac{1}{16}\sin 4x+\frac{1}{24}\sin 6x+C$. **5.14.** $-\frac{3}{16}\cos 2x+$
$+\frac{3}{64}\cos 4x+\frac{1}{48}\cos 6x-\frac{3}{128}\cos 8x+\frac{1}{192}\cos 12x+C$.

5.15. $-\frac{1}{2\sin x}-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|+C\ (x\neq\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z})$.

5.16. $-\frac{1}{\sin 6}\ln\left|\frac{\sin(x+7)}{\sin(x+1)}\right|+C\ (x+1\neq\pi n,\ x+7\neq\pi k,\ n,k\in\mathbb{Z})$.

5.17. $-\frac{1}{\sin 3}\ln\left|\frac{\cos(x+2)}{\cos(x-1)}\right|+C\ (x-1\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ x+2\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,$
$n,k\in\mathbb{Z})$.

5.18. $\frac{1}{\cos 4}\ln\left|\frac{\sin\frac{x-4}{2}}{\cos\frac{x+4}{2}}\right|+C$ $(x-4\neq 2\pi n,\ x+4\neq \pi+2\pi k,\ n, k\in\mathbb{Z})$.

5.19. $\frac{1}{\sin 3}\ln\left|\frac{\sin\frac{x-3}{2}}{\sin\frac{x+3}{2}}\right|+C$ $(x-3\neq 2\pi n,\ x+3\neq 2\pi k,\ n, k\in\mathbb{Z})$.

5.20. $\frac{1}{5\sin 1}\ln\left|\frac{\sin\frac{5x-\frac{\pi}{2}+1}{2}}{\cos\frac{5x+\frac{\pi}{2}-1}{2}}\right|+C$ $(5x\neq\frac{\pi}{2}-1+2\pi n,\ 5x\neq\frac{\pi}{2}+1+2\pi k,\ n, k\in\mathbb{Z})$. **5.21.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}x)+C$.

5.22. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}\right)+C$. **5.23.** $\frac{1}{2}\ln|\sin x+\cos x|+\frac{1}{2}x+C$ $(x\neq-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ n, k\in\mathbb{Z})$.

5.24. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln|\sin x+\cos x|+C$ $(x\neq-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ x\neq\pi k,\ n, k\in\mathbb{Z})$.

5.25. $-\frac{\cos^4 x}{4}+\frac{\cos^6 x}{4}+C$.

5.26. $\frac{5}{16}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+C$.

5.27. $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x-\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x-\ln|\cos x|+C$ $(x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z})$.

5.28. $-\frac{1}{\sin x}-2\sin x+\frac{\sin^3 x}{3}+C$ $(x\neq\pi n,\ n\in\mathbb{Z})$.

5.29. $\frac{1}{3\cos^2 x}-\frac{2}{\cos x}-\cos x+C$ $(x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z})$.

5.30. $\frac{1}{\cos x}-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{3}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$ $(x\neq\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z})$.

5.31. $\frac{1}{\cos x}-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}-\frac{\cos x}{4\sin^4 x}-\frac{3}{8}\frac{\cos x}{\sin^2 x}+\frac{15}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$ $(x\neq\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z})$.

5.32. $\frac{1}{4\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4\operatorname{tg}x}{\sqrt{7}}+C$. **5.33.** $\frac{1}{3\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}x}{\sqrt{5}}+C$.

5.34. $-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+2\sin\sqrt{x}+C\ (x\geqslant 0)$.

5.35. $\frac{3}{4}\sin x-\frac{3}{4}x\cos x-\frac{1}{36}\sin 3x+\frac{1}{12}x\cos 3x+C$.

5.36. $x^2\sin x+2(x\cos x-\sin x)+C$. **5.37.** $\sin(e^x)-e^x\cos(e^x)+C$.

5.38. $\frac{1}{2}\sin(x^2+4x+1)+C$. **5.39.** $(x+1)^2\sin x+2(x+1)\cos x+C$.

5.40. $-\frac{1}{2}\cos(x^2)+C$. **5.41.** $-x\operatorname{ctg}x+\ln|\sin x|+C\ (x\neq\pi n,\ n\in\mathbb{Z})$.

5.42. $\frac{1}{3}\left(-\frac{x\operatorname{ctg}x}{\sin^2 x}-\frac{1}{2\sin^2 x}-2x\operatorname{ctg}x+2\ln|\sin x|\right)+C\ (x\neq\pi n,\ n\in\mathbb{Z})$.

5.43. $\arcsin\frac{\sin x+2}{\sqrt{6}}+C\ (\sin x<\sqrt{6}-2)$.

5.44. $-2\sqrt{\operatorname{ctg}x}+\frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}+C\ (\sin 2x>0)$.

5.45. $-\frac{1}{2}\cos x\sqrt{\cos 2x}-\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\sqrt{2}\cos x+\sqrt{\cos 2x}\right|+C\ \ (\cos 2x\geqslant 0)$.

5.46. $\frac{1}{2}\sin x\sqrt{\cos 2x}+\frac{\sqrt{2}}{4}\arcsin(\sqrt{2}\sin x)+C\ \ (\cos 2x\geqslant 0)$.

5.47. $\arcsin\frac{2\sin x-1}{\sqrt{2}(1-\sin x)}+C\ \ (x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z};\ \cos 2x>0)$.

5.48. $x-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}x)+C\ (x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z})$.

5.49. $\frac{2}{13}x-\frac{3}{13}\ln|2\sin x+3\cos x|+C\ (2\sin x+3\cos x\neq 0)$.

5.50. $\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x-2}\right|+C\ \ (x\neq 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z})$.

5.51. $-\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C\ (x\neq\pi+2\pi n,$ $n\in\mathbb{Z})$. **5.52.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}2x}{\sqrt{2}}\right)+C$.

5.53. $-\frac{1}{6}\ln\left|\frac{(\sin x+\cos x)^2}{1-\sin x\cos x}\right|-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\cos x-\sin x}{\sqrt{\sin x}}\right)+C$

$(x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z};\ \sin x > 0)$.

5.54. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{2\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}}+C.$

5.55. $\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}\ln|2\sin x+\cos x+2|-\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3}\right|+C$ $(2\sin x + \cos x \neq$ $\neq -2;\ x \neq \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z})$. **5.56.** $-\ln(\cos^2+\sqrt{1+\cos^4 x})+C.$

Глава 6

6.1. $\frac{1}{32}\operatorname{sh}4x-\frac{1}{8}x + C$. **6.2.** $\frac{1}{2}\operatorname{sh}2x-\frac{1}{2}\operatorname{ch}2x + C$.

6.3. $\frac{a\operatorname{ch}(ax)\cos(bx) + b\operatorname{sh}(ax)\sin(bx)}{a^2 + b^2} + C$.

6.4. $\frac{2}{\ln 2}(\sqrt{2^x-1}-\operatorname{arctg}\sqrt{2^x-1})+C\ \ (x \geqslant 0)$.

6.5. $\frac{2}{\ln 2}\left(\frac{1}{3}2^{\frac{3x}{2}}+2^{-\frac{x}{2}}\right)+C$. **6.6.** $\left(\frac{32}{5}\right)^x\left(\ln\frac{32}{5}\right)^{-1}+C.$

6.7. $-2e^{-\frac{x}{2}}(x^2+4x+8)+C$. **6.8.** $-2(2x^2+6x+13)e^{-\frac{x}{2}}+C.$

6.9. $\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x) + C$. **6.10.** $\frac{1}{8}e^{2x}(2-\sin 2x-\cos 2x) + C$.

6.11. $\sin(e^x) + C$. **6.12.** $-\frac{e^{-x^2}}{2}(x^6+3x^4+6x^2+6)+C.$

6.13. $2(x-2)\sqrt{1+e^x}-2\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right|+C.$

6.14. $\frac{1}{2e^x}(\sqrt{1-e^x}-\sqrt{1+e^x})+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{(\sqrt{1+e^x}-1)(\sqrt{1-e^x}-1)}{(\sqrt{1+e^x}+1)(\sqrt{1-e^x}+1)}\right|+C.$

6.15. $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{e^{2x}}{2} + C$. **6.16.** $-e^x-2\ln|e^x-1| + C\ (x \neq 0)$.

6.17. $x + \ln|e^x-3| + C\ (x \neq \ln 3)$.

6.18. $\frac{1}{32}\ln(|e^x-2|^{13}(e^x+2)^7)+\frac{3}{16}\ln(e^{2x}+4)-\frac{3}{16}\operatorname{arctg}\frac{e^x}{2}-x+C$

$(x \neq \ln 2)$. **6.19.** $\frac{3}{5}(\ln x)^{\frac{5}{3}} + C$ $(x > 0)$. **6.20.** $\ln|\ln x| + C$ $(x > 0;$ $x \neq 1)$. **6.21.** $-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$ $(x > 0)$. **6.22.** $-\frac{2\ln x + 1}{4x^2} + C$ $(x > 0)$.

6.23. $\frac{1}{4}x^2(2\ln^2 x - 2\ln x + 1) + C$ $(x > 0)$.

6.24. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\left(\ln^2 x - \frac{4}{3}\ln x + \frac{8}{9}\right) + C$ $(x > 0)$.

6.25. $2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + C$ $(x > 0)$. **6.26.** $\frac{x^2}{2}\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln|1 + x| + C$ $(x \notin [-1; 0])$. **6.27.** $\frac{x^2}{2}\ln\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$ $(x > 0)$.

6.28. $x\ln(x^2 + x) + \ln|x + 1| - x + C$ $(x \notin [-1; 0])$.

6.29. $\frac{x^3}{3}\ln(1 + x) - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{6} - \frac{x}{3} + \frac{1}{3}\ln(1 + x) + C$ $(x > -1)$.

6.30. $\frac{x}{2} + \frac{x\cos(2\ln x) + 2x\sin(2\ln x)}{10} + C$ $(x > 0)$.

6.31. $\operatorname{tg} x \cdot \ln(\cos x) + \operatorname{tg} x - x + C$ $(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z})$.

6.32. $\frac{1}{2}\cos^2 x(1 - 2\ln\cos x) + C$ $(\cos x > 0)$. **6.33.** $2\sqrt{\ln x + x} + C$ $(\ln x + x > 0; x > 0)$. **6.34.** $\frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right| + C$ $(x > 0)$.

6.35. $x\ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\arcsin x + C$ $(|x| < 1)$.

6.36. $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$.

6.37. $-\sqrt{1-x^2}\ln\frac{x}{\sqrt{1-x}} - \ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} + \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} + C$ $(0 < x < 1)$. **6.38.** $\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}(3 + x^2)\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2}\ln(1 + x^2) +$ $+ \frac{x^2 + 1}{2} \cdot \operatorname{arctg} x \cdot \ln(1 + x^2)$. **6.39.** $\frac{x^2}{2}\arcsin x - \frac{1}{4}\arcsin x +$ $+ \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2} + C$. **6.40.** $\frac{x}{2} + \frac{x^2 + 1}{2}\operatorname{arctg} x + C$.

6.41. $\dfrac{x^3}{3}\arcsin x+\dfrac{2+x^2}{9}\sqrt{1-x^2}+C\ (|x|\leqslant 1)$. **6.42.** $\dfrac{x^3}{3}\operatorname{arctg} x-\dfrac{x^2}{6}+$ $+\dfrac{1}{6}\ln(1+x^2)+C$. **6.43.** $\dfrac{x^2}{2}\arccos\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2-1}\cdot\operatorname{sgn} x+C\ (|x|\geqslant 1)$.

6.44. $\dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|+C\ (|x|<1)$.

6.45. $-\dfrac{\arcsin x}{x}-\ln\left|\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+C\ (0<|x|\leqslant 1)$. **6.46.** $\dfrac{1}{4}x^4\operatorname{arctg}^2 x-$ $-\dfrac{1}{4}\operatorname{arctg}^2 x-\dfrac{1}{6}(x^3-3x)\operatorname{arctg} x+\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{1}{3}\ln(1+x^2)+C$.

6.47. $t\cdot\operatorname{tg}^2 t-\operatorname{tg} t+t$, где $t=\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$ $(x>0)$.

6.48. $-\dfrac{1}{6}\operatorname{arctg}^2(3x)+C$. **6.49.** $-\sqrt{1-x^2}-\dfrac{2}{5}\arccos^{\frac{5}{2}} x+C\ (|x|<1)$.

6.50. $-\dfrac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}+\dfrac{1}{8}\arcsin^4(2x)+C\ (|x|<\dfrac{1}{2})$.

6.51. $\dfrac{1}{8}\ln(1+4x^2)+\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}^{\frac{3}{2}}(2x)+C\ (x\geqslant 0)$.

6.52. $\dfrac{1}{2}(\arcsin^2 x+\arccos^2 x)+C\ (|x|<1)$.

6.53. $x\operatorname{arctg} x-\dfrac{3}{2}\operatorname{arctg}^2 x-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$.

6.54. $2x\operatorname{arctg} x+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x-\ln(1+x^2)+C$.

6.55. $-\sqrt{1-x^2}\left(\dfrac{2+x^2}{3}\right)\arccos x-\dfrac{6x+x^3}{9}+C\ (|x|<1)$.

6.56. $\dfrac{\operatorname{arctg}^2 x}{2}+\left(\dfrac{x^3}{3}-x\right)\operatorname{arctg} x-\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{2}{3}\ln(1+x^2)+C$.

6.57. $-2e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{arctg}\left(e^{\frac{x}{2}}\right)-\left[\operatorname{arctg}\left(e^{\frac{x}{2}}\right)\right]^2+x-\ln(1+e^x)+C$.

Литература

1. *Брычков, Ю. А.* Таблицы неопределенных интегралов / Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, А. П. Прудников. — 2-е изд., испр. — М. : Физматлит, 2003.

2. *Виноградова, И. А.* Математический анализ в задачах и упражнениях. В 3 т. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисление : учеб. пособие для университетов, пед. вузов / И. А. Виноградова, С. Н. Олехник, В. А. Садовничий. — М. : МЦНМО ; Изд-во МГУ, 2017.

3. *Глейзер, Г. И.* История математики в школе: IX—X классы : пособие для учителей / Г. И. Глейзер. — М. : Просвещение, 1983.

4. *Гусак, А. А.* Справочное пособие по решению задач: математический анализ и дифференциальные уравнения / А. А. Гусак. — Минск : ТетраСистемс, 1998.

5. *Данко, П. Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 1 : учеб. пособие для втузов / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. — 5-е изд., испр. — М. : Высшая школа, 1997.

6. *Демидович, Б. П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б. П. Демидович. — СПб. : Лань, 2017.

7. *Ильин, В. А.* Математический анализ. В 2 ч. Ч. 1. В 2 кн. Книга 1 : учебник для академического бакалавриата / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Х. Сендов. — 4-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

8. *Малугин, В. А.* Математический анализ : учеб. пособие / В. А. Малугин. — М. : Эксмо, 2010.

9. Математика. Большой энциклопедический словарь / под ред. Ю. В. Прохорова. — 3-е изд. — М. : Большая российская энциклопедия, 2000.

10. Математический анализ в вопросах и задачах : учеб. пособие/ В. Ф. Бутузов [и др.] ; под ред. В. Ф. Бутузова. — 6-е изд., испр. — СПб. : Лань, 2008.

11. *Садовничий, В. А.* Задачи студенческих олимпиад по математике : пособие для студентов вузов / В. А. Садовничий, А. С. Подколзин. — 2-е изд., стереотип. — М. : Дрофа, 2003.

12. Справочное пособие по высшей математике. Т. 1. Математический анализ. Ч. 3: Неопределенный интеграл, определенный интеграл / И. И. Ляшко [и др.]. — М. : URSS, 2017.

13. *Фихтенгольц, Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. II / Г. М. Фихтенгольц. — 9-е изд. — СПб. : Лань, 2017.

Новинки по математическому анализу Издательства Юрайт

1. *Аксенов, А. П.* Математический анализ в 4 ч. Ч. 1 : учебник и практикум для академического бакалавриата / А. П. Аксенов. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

2. *Аксенов, А. П.* Математический анализ в 4 ч. Ч. 2 : учебник и практикум для академического бакалавриата / А. П. Аксенов. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

3. *Аксенов, А. П.* Математический анализ в 4 ч. Ч. 3 : учебник и практикум для академического бакалавриата / А. П. Аксенов. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

4. *Аксенов, А. П.* Математический анализ в 4 ч. Ч. 4 : учебник и практикум для академического бакалавриата / А. П. Аксенов. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

5. *Баврин, И. И.* Математический анализ : учебник и практикум для академического бакалавриата / И. И. Баврин. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

6. *Бугров, Я. С.* Высшая математика в 3 т. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисление в 2 кн. Книга 1 : учебник для академического бакалавриата / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — 7-е изд., стер. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

7. *Бугров, Я. С.* Высшая математика в 3 т. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисление в 2 кн. Книга 2 : учебник для академического бакалавриата / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — 7-е изд., стер. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

8. *Далингер, В. А.* Методика обучения началам математического анализа : учебник и практикум для академического бакалавриата / В. А. Далингер. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

9. *Ильин, В. А.* Математический анализ в 2 ч. Ч. 1 в 2 кн. Кн. 1 : учебник для академического бакалавриата / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. — 4-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

10. *Ильин, В. А.* Математический анализ в 2 ч. Ч. 1 в 2 кн. Кн. 2 : учебник для академического бакалавриата / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. — 4-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

11. *Ильин, В. А.* Математический анализ в 2 ч. Ч. 2 : учебник для академического бакалавриата / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. — 3-е изд. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

12. *Капкаева, Л. С.* Математический анализ: теория пределов, дифференциальное исчисление : учебное пособие для вузов / Л. С. Капкаева. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

13. *Краснова, С. А.* Математический анализ для экономистов в 2 ч. Ч. 1 : учебник и практикум для прикладного бакалавриата / С. А. Краснова, В. А. Уткин. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

14. *Краснова, С. А.* Математический анализ для экономистов в 2 ч. Ч. 2 : учебник и практикум для прикладного бакалавриата / С. А. Краснова, В. А. Уткин. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

15. *Кремер, Н. Ш.* Математический анализ в 2 ч. Ч. 1 : учебник и практикум для академического бакалавриата / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин ; отв. ред. Н. Ш. Кремер. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

16. *Кремер, Н. Ш.* Математический анализ в 2 ч. Ч. 2 : учебник и практикум для академического бакалавриата / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин ; отв. ред. Н. Ш. Кремер. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

17. *Кудрявцев, Л. Д.* Курс математического анализа в 3 т. Т. 1 : учебник для бакалавров / Л. Д. Кудрявцев. — 6-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

18. *Кудрявцев, Л. Д.* Курс математического анализа в 3 т. Т. 2 в 2 кн. Кн. 1 : учебник для академического бакалавриата / Л. Д. Кудрявцев. — 6-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

19. *Кудрявцев, Л. Д.* Курс математического анализа в 3 т. Т. 2 в 2 кн. Кн. 2 : учебник для академического бакалавриата / Л. Д. Кудрявцев. — 6-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

20. *Кудрявцев, Л. Д.* Курс математического анализа в 3 т. Т. 3 : учебник для бакалавров / Л. Д. Кудрявцев. — 6-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

21. *Кытманов, А. М.* Математический анализ : учеб. пособие для бакалавров / А. М. Кытманов. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

22. *Малугин, В. А.* Математический анализ для экономического бакалавриата : учебник и практикум / В. А. Малугин. — 3-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

23. *Никитин, А. А.* Математический анализ. Сборник задач : учеб. пособие для академического бакалавриата / А. А. Никитин. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

24. *Никитин, А. А.* Математический анализ. Углубленный курс : учебник и практикум для академического бакалавриата / А. А. Никитин, В. В. Фомичев. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

25. *Потапов, А. П.* Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной в 2 ч. Ч. 1 : учебник и практикум для академического бакалавриата / А. П. Потапов. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

26. *Потапов, А. П.* Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной в 2 ч. Ч. 2 : учебник и практикум для академического бакалавриата / А. П. Потапов. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

27. *Привалов, И. И.* Интегральные уравнения : учебник для вузов / И. И. Привалов. — 4-е изд., стер. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

28. *Рудык, Б. М.* Математический анализ для экономистов : учебник и практикум для академического бакалавриата / Б. М. Рудык, О. В. Татарников. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

29. *Садовничий, В. А.* Лекции по математическому анализу в 2 ч. Ч. 1. Дифференциальное исчисление : учебник для академического бакалавриата / В. А. Садовничий, В. Н. Чубариков, Г. И. Архипов. — 6-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

30. *Садовничий, В. А.* Лекции по математическому анализу в 2 ч. Ч. 2. Интегральное исчисление : учебник для академического бакалавриата / В. А. Садовничий, В. Н. Чубариков, Г. И. Архипов. — 6-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

31. *Чебышёв, П. Л.* Избранные труды. Анализ / П. Л. Чебышёв. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

32. *Шагин, В. Л.* Математический анализ. Базовые понятия : учеб. пособие для прикладного бакалавриата / В. Л. Шагин, А. В. Соколов. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

33. *Шипачев, В. С.* Дифференциальное и интегральное исчисление : учебник и практикум для прикладного бакалавриата / В. С. Шипачев. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

Наши книги можно приобрести:

Учебным заведениям и библиотекам:
в отделе по работе с вузами
тел.: (495) 744-00-12, e-mail: vuz@urait.ru

Частным лицам:
список магазинов смотрите на сайте urait.ru
в разделе «Частным лицам»

Магазинам и корпоративным клиентам:
в отделе продаж
тел.: (495) 744-00-12, e-mail: sales@urait.ru

Отзывы об издании присылайте в редакцию
e-mail: red@urait.ru

Учебное издание

Хорошилова Елена Владимировна

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ: НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Учебное пособие для СПО

Формат $60\times90\,{}^{1}/_{16}$.
Гарнитура «Charter». Печать цифровая.
Усл. печ. л. 11,69.

ООО «Издательство Юрайт»
111123, г. Москва, ул. Плеханова, д. 4а.
Тел.: (495) 744-00-12. E-mail: izdat@urait.ru, www.urait.ru